CPGE PC Le 17.09.16
2016-2017

Devoir Surveillé n°1

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercices et d'un problème.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice

Dans cet exercice on étudie une suite à double, notée $\big(S(p,n)\big)_{p,n\geqslant 1}$, définie par récurrence.
On cherche à exprimer explicitement ce coefficient.
On suppose :

$$\forall\, p,n \in \mathbb{N}^* : \quad S(p,1) = 1, \qquad S(p,n) = 0 \text{ si } p < n \qquad \text{et} \qquad S(p,n) = n\big(S(p-1,n)+S(p-1,n-1)\big)$$

1. En s'inspirant du triangle de Pascal, construire une table des $S(p,n)$ pour $0 < p \leqslant 7$ et $0 < n \leqslant 7$.
   $S(p,n)$ sera localisé en ligne p et colonne n
2. Montrer que $S(n+1,n) = n!\binom{n+1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $n,p \in \mathbb{N}^*$, $n^p = \displaystyle\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}S(p,h)$.
4. Montrer que pour tout $q \leqslant k \leqslant n \in \mathbb{N}$, $(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{q} = (-1)^q\binom{n}{q}\times\binom{n-q}{k-q}(-1)^{k-q}$,
   puis que si $q < n$: $\displaystyle\sum_{k=q}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{q} = 0$ (on pourra faire un changement de variable).
   Que vaut $\displaystyle\sum_{k=n}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{q}$?
5. Déduire des deux questions précédentes :
$$S(p,n) = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p$$

$S(p,n)$ correspond exactement au nombre de surjections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments. Ainsi $S(7,4) = 8\,400$ compte par exemple le nombre de distributions de 7 pions différents sur un damier à 4 cases, de manière à ce qu'aucune case ne soit vide.

Problème

On cherche à trouver une formule équivalente à celle du discriminant pour résoudre les équations de degré 3.
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)$$
Nous allons commencer par voir comment mettre sous une forme pratique l'équation (partie 1). Bien nous allons utiliser deux méthodes indépendantes (partie 2 et 3) et très différentes dans l'esprit.

A. Mise sous forme réduite

Considérons l'équation (1).

1. Montrer qu'en faisant un changement de variable simple $\overline{x} = x - \alpha$, où α est constante à choisir, dépendante a priori de a,b,c,d, on peut transformer l'équation (1) en l'équation
$$\overline{x}^3 = 3p\overline{x} + 2q \qquad (2)$$
   Donner alors les valeurs de p et de q, en fonction de a,b,c et d.

2. Vérifier les résultats que vous avez obtenus pour deux familles de valeurs de (a, b, c, d) particulières.
3. Application.
   Montrer que pour trouver les solutions de $8x^3 - 12x^2 - 18x + 27 = 0$, il suffit de résoudre $\overline{x}^3 = 3\overline{x} - 2$.

B. Méthode de Viete : usage de la trigonométrie

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(3\theta)$, sous forme de combinaison linéaire de puissances de $\cos\theta$.

Par la suite, on notera $C = \cos\theta$.

2. Faire le changement de variable $\overline{x} \leftrightarrow C$ donné par $\overline{x} = 2\sqrt{p}C$, dans l'équation réduite (2).
   En déduire une expression de $\cos(3\theta)$ en fonction de p et de q.
3. En supposant que $q^2 \leqslant p^3$, déduire une expression des trois racines $\overline{x}$ de (2), à l'aide la fonction cos.
   On exploitera Φ, l'angle de $[0, \pi]$ tel que $\cos(\Phi) = \dfrac{q}{p^{3/2}}$
4. Application.
   Donner, en exploitant la méthode de Viète, les racines de $8x^3 - 12x^2 - 18x + 27 = 0$.
   On commencera par vérifier que $q^2 \leqslant p^3$

C. Méthode de Cardan-Tartaglia : usage de la symétrie des racines

Notons x_1, x_2 et x_3 les trois racines (complexes) de (2) : $x^3 = 3px + 2q$.

On notera également $j = e^{2i\pi/3} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1. (a) Exprimer en fonction de p et q les valeurs des calculs suivants :
   $$x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \qquad\qquad x_1x_2x_3$$
   (b) Après avoir calculer $(x_1 + x_2 + x_3)^2$, montrer que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6p$.
   (c) De même, montrer que $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 6q$.
2. (a) Calculer les valeurs de j^3.
   En déduire que pour $a, b \in \mathbb{Z}$, $j^a = j^b$ si et seulement si $a \equiv b[3]$.
   (b) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
3. On considère $u = \dfrac{1}{3}(x_1 + jx_2 + j^2x_3)$ et $v = \dfrac{1}{3}(x_1 + jx_3 + j^2x_2)$.
   (a) Montrer que $u + v = x_1$
   (b) Que valent $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$?
   (c) Montrer également que $uv = p$ (*On exploitera* $C.1.(b)$)
4. On note également $\alpha = u^3 = \left(\dfrac{1}{3}(x_1 + jx_2 + j^2x_3)\right)^3$ et $\beta = v^3 = \left(\dfrac{1}{3}(x_1 + jx_3 + j^2x_2)\right)^3$.
   On note $\alpha_{k,\ell,m} = \left(\dfrac{1}{3}(x_k + jx_\ell + j^2x_m)\right)^3$ et $\beta_{k,\ell,m} = \left(\dfrac{1}{3}(x_k + jx_m + j^2x_\ell)\right)^3$.
   (a) Montrer que $\alpha_{2,3,1} = \alpha$ et $\beta_{2,1,3} = \alpha$.
   (b) Reproduire et compléter le tableau

$(k, \ell, m) =$	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(2, 3, 1)$	$(2, 1, 3)$	$(3, 1, 2)$	$(3, 2, 1)$
$\alpha_{k,\ell,m} =$	α		α			
$\beta_{k,\ell,m} =$	β			α		

5. En utilisant des résultats précédents, montrer que :
   (a) $\alpha\beta = p^3$
   (b) $\alpha + \beta = \dfrac{1}{27}\big(5(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3) + 12x_1x_2x_3)\big) = 2q$
   (c) puis que $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - 2qx + p^3$.
6. Application.
   Donner, en exploitant la méthode de Tartaglia, les racines de $8x^3 - 12x^2 - 18x + 27 = 0$.
   On commencera par reprendre p et q de A., puis calculer α et β et enfin x_1, x_2 et x_3.