

Devoir Surveillé n°1

CORRECTION

Dans la marge, vous trouverez les coefficients de chaque question pour la notation.

Exercice

1. Nous écrirons deux nombres par case : celui obtenu par addition comme pour le triangle de Pascal (en petit), puis celui obtenu par la multiplication par p . C'est ce dernier qui est le nombre $S(n, p)$.

2

$n \setminus p$	1	2	3	4	5	6	7
1	¹ 1						
2	¹ 1	¹ 2					
3	¹ 1	³ 6	² 6				
4	¹ 1	⁷ 14	¹² 36	⁶ 24			
5	¹ 1	¹⁵ 30	⁵⁰ 150	⁶⁰ 240	²⁴ 120		
6	¹ 1	³¹ 62	¹⁸⁰ 540	³⁹⁰ 1560	³⁶⁰ 1800	¹²⁰ 720	
7	¹ 1	⁶³ 126	⁶⁰² 1806	²¹⁰⁰ 8400	³³⁶⁰ 16 800	²⁵²⁰ 15 120	⁷²⁰ 5040

2. On peut faire une récurrence, mais on peut aussi remarquer que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, S(n, n) = n(S(n-1, n) + S(n-1, n-1)) = nS(n-1, n-1)$ et donc $S(n, n) = n!$.
 Puis $S(n+1, n) = n(S(n, n) + S(n, n-1)) = nn! + nS(n, n-1)$.

Notons $v_k = \frac{S(k+1, k)}{k!}$, on a donc

$$v_n = \frac{S(n+1, n)}{n!} = n + \frac{S(n, n-1)}{(n-1)!} = n + v_{n-1}$$

donc par télescopage :

$$v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

Et comme $v_0 = S(1, 0) = 0$ on a donc

2

$$S(n+1, n) = n!v_n = n! \binom{n+1}{2}$$

3. Posons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_p : \ll \forall n \in \mathbb{N}, n^p = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} S(p, h) \gg$.

— Pour $p = 1$: $\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} S(1, h) = \binom{n}{0} S(1, 0) + \binom{n}{1} S(1, 1) = 1 \times 0 + n \times 1 = n$.

Donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_p$ est vraie.

On va démontrer que $\mathcal{P}_{p+1}$ est alors vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} S(p+1, h) = \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} h(S(p, h) + S(p, h-1))$$

La somme commence à $h = 1$; dans le cas $h = 0$, le nombre additionné est nul.

Puis comme $\binom{n}{h} h = \frac{n!}{h!(n-h)!} h = \frac{n(n-1)!}{(h-1)!((n-1)-(h-1))!} = n \binom{n-1}{h-1}$ (si $n \geq 1$)

$$\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} S(p+1, h) = n \left(\sum_{h=1}^n \binom{n-1}{h-1} S(p, h) + \sum_{h=1}^n \binom{n-1}{h-1} S(p, h-1) \right)$$

Puis en faisant le changement d'indice $k = h$ dans la première somme et $k = h-1$ dans la seconde :

$$\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} S(p+1, h) = n \left(\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} S(p, k) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} S(p, k) \right)$$

$$= n \left[\sum_{k=1}^n \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) S(p, k) + \binom{n-1}{0} S(p, 0) \right]$$

Et d'après la formule du triangle de Pascal (et comme $S(p, 0) = 0$) :

$$\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} S(p+1, h) = n \left[\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S(p, k) \right] = n \times n^p = n^{p+1}$$

d'après la relation $\mathcal{P}_p$ qui est vraie.

Par conséquent, on a prouvé que dans ce cas $\mathcal{P}_{p+1}$ est également vraie.

Donc la récurrence est démontrée et

2

pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $n^p = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} S(p, h)$.

4. Soit $q \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{q} &= (-1)^{k-q} (-1)^q \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{q!} (q-k)! = (-1)^{k-q} (-1)^q \frac{n!}{(n-k)!q!(q-k)!} \\ &= (-1)^q \frac{n!}{q!(n-q)!} \frac{(n-q)!}{(q-k)!(n-k)!} (-1)^{k-q} \end{aligned}$$

et comme $n-k = (n-q) - (k-q)$, on en déduit

$$\forall q \leq k \leq n \in \mathbb{N}, (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{q} = (-1)^q \binom{n}{q} \times \binom{n-q}{k-q} (-1)^{k-q}$$

On a alors avec le changement d'indice $h = k - q$:

$$\sum_{k=q}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{q} = (-1)^q \sum_{k=q}^n (-1)^{k-q} \binom{n}{q} \binom{n-q}{k-q} = (-1)^q \binom{n}{q} \sum_{h=0}^{n-q} \binom{n-q}{h} (-1)^h$$

$$\sum_{k=q}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{q} = (-1)^q \binom{n}{q} (-1+1)^{n-q} = \begin{cases} 0 & \text{si } n-q > 0 \\ (-1)^n & \text{si } n-q = 0 \end{cases}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

5. D'après la question 3 qui exprime k^p en fonction d'une somme :

$$\begin{aligned} (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p &= (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\sum_{h=0}^k \binom{k}{h} S(p, h) \right) \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n \left(\sum_{h=0}^k (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{h} S(p, h) \right) \end{aligned}$$

Or on peut échanger les deux sommes : $\sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^k \dots = \sum_{h=0}^n \sum_{k=h}^n \dots$ Donc

$$\begin{aligned} (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p &= (-1)^n \sum_{h=0}^n \left(\sum_{k=h}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{h} S(p, h) \right) \\ &= (-1)^n \sum_{h=0}^n S(p, h) \left(\sum_{k=h}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{h} \right) \end{aligned}$$

Or nous avons vu que $\sum_{k=h}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{h} = 0$ dès que $h < n$, il reste donc

$$(-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p = (-1)^n \left(\sum_{h=0}^{n-1} S(p, h) \times 0 + \underbrace{S(p, n) ((-1)^n)}_{h=n} \right) = S(p, n)$$

On a bien

/2

$$S(p, n) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$

Problème

On cherche à trouver une formule équivalente à celle du discriminant pour résoudre les équations de degré 3.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

A. Mise sous forme réduite

Considérons l'équation (1).

1. On pose $\bar{x} = x - \alpha \iff x = \bar{x} + \alpha$,

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}) = 0 \iff (\bar{x} + \alpha)^3 + \frac{b}{a}(\bar{x} + \alpha)^2 + \frac{c}{a}(\bar{x} + \alpha) + \frac{d}{a} = 0 \\ &\iff \bar{x}^3 + \left(3\alpha + \frac{b}{a}\right)\bar{x}^2 + \left(3\alpha^2 + 2\frac{b}{a}\alpha + \frac{c}{a}\right)\bar{x} + \left(\alpha^3 + \frac{b}{a}\alpha^2 + \frac{c}{a}\alpha + \frac{d}{a}\right) = 0 \end{aligned}$$

En prenant

/1

$$\alpha = -\frac{b}{3a}, \text{ alors } x \text{ est racine de (1) ssi } \bar{x} = x - \alpha \text{ est racine de (2) : } \bar{x}^3 = 3p\bar{x} + 2q$$

où

$$\begin{cases} p = \frac{-1}{3} \left(3\alpha^2 - 2\frac{b}{a}\alpha - \frac{c}{a}\right) = \frac{b^2 - 3ac}{9a^2} \\ q = \frac{-1}{2} \left(\alpha^3 + \frac{b}{a}\alpha^2 + \frac{c}{a}\alpha + \frac{d}{a}\right) = \frac{9abc - 2b^3 - 27a^2d}{54a^3} \end{cases}$$

2. On peut par exemple prendre $b = 0$.

L'équation (1) est presque sous la forme (2) avec $3p = -\frac{c}{a}$ et en effet : $p = -\frac{3ac}{9a^2} = -\frac{c}{3a}$.

et avec $2q = -\frac{d}{a}$ et on a en effet : $q = -\frac{27a^2d}{54a^3} = -\frac{d}{2a}$.

Puis avec par exemple prendre $a = d = 1$ et $b = c = 3$.

L'équation (1) devient $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3 = 0$, avec $\bar{x} = x + 1$ on a $\bar{x}^3 = 0$.

Dans ce cas : $p = \frac{b^2 - 3ac}{9a^2} = \frac{9 - 9}{9} = 0$ et $q = \frac{9abc - 2b^3 - 27a^2d}{54a^3} = \frac{81 - 54 - 27}{54} = 0$.

/2

Ces cas particuliers semblent confirmer les résultats obtenus

3. Application.

Pour l'équation : $8x^3 - 12x^2 - 18x + 27 = 0$, on a $\alpha = -\frac{b}{3a} = \frac{12}{3 \times 8} = \frac{1}{2}$, puis :

$$\begin{cases} p = \frac{b^2 - 3ac}{9a^2} = \frac{12^2 - 3 \times 8 \times (-18)}{9 \times 8^2} = \frac{3^2 \times 2^4 + 3^3 \times 2^4}{3^5 \times 2^6} = \frac{1 + 3}{2^2} = 1 \\ q = \frac{9abc - 2b^3 - 27a^2d}{54a^3} = \frac{3^5 \times 2^6 + 2^7 \times 3^3 - 3^3 \times 2^6 \times 3^3}{2 \times 3^3 \times 2^9} = \frac{3^2 \times 2^6 + 2 - 3^3}{2^4} = \frac{-16}{16} = -1 \end{cases}$$

/1

$$\bar{x} = x - \frac{1}{2} \text{ racine de } \bar{x}^3 = 3\bar{x} - 2$$

B. Méthode de Viète : usage de la trigonométrie

1. On applique la formule d'Euler :

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \Re(e^{3i\theta}) = \Re((e^{i\theta})^3) = \Re((\cos \theta + i \sin \theta)^3) \\ &= \Re(\cos^3 \theta + 3i \sin \theta \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta - i \sin^3 \theta) \\ &= \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta = \cos^3 \theta - 3(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{aligned}$$

On a donc

/1

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

Par la suite, on notera $C = \cos \theta$.

2. On a donc dans (2)

$$2^3(\sqrt{p})^3 C^3 = 6p\sqrt{p}C + 2q \iff 4C^3 - 3C = \frac{q}{p^{3/2}}$$

On en déduit que

/1

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = \frac{q}{p^{3/2}}$$

3. On suppose alors que $q^2 \leq p^3$, donc $\frac{q}{p^{3/2}} \in [-1, 1]$.

Donc, il existe un unique angle Φ , de $[0, \pi]$ tel que $\cos(\Phi) = \frac{q}{p^{3/2}}$. (En fait $\Phi = \arccos \frac{q}{p^{3/2}}$.)

On a donc :

$$\cos 3\theta = \cos \Phi \iff \begin{cases} 3\theta \equiv \Phi[2\pi] \\ \text{ou} \\ 3\theta \equiv -\Phi[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \theta \equiv \frac{1}{3}\Phi[\frac{2}{3}\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv \frac{1}{3}\Phi[\frac{2}{3}\pi] \end{cases}$$

Ce qui donne a priori 6 angles différents pour θ dans $[0, 2\pi]$.

Puis, on trouve alors $\bar{x} = 2\sqrt{p} \cos \theta$, ce qui conduit à 3 racines, car $\cos$ est paire.

Finalement,

/2

les trois racines de (2) sont $\bar{x}_k = 2\sqrt{p} \cos \left(\frac{1}{3}\Phi + \frac{2}{3}k\pi \right)$, avec $k \in \{0, 1, 2\}$

4. Reprenons l'équation (1) : $8x^3 - 12x^2 - 18x + 27 = 0$.

La transformation $\bar{x} = x - \frac{1}{2}$, conduit à l'équation (2) : $\bar{x}^3 = 3\bar{x} - 2$ On vérifie que $q^2 = 1 \leq p^3 = 1$.

Puis, on cherche Φ tel que $\cos \Phi = \frac{-1}{1} = -1$, donc on prend $\Phi = \pi$.

Les racines de (2) sont alors $\bar{x}_k = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \right)$. On trouve $\bar{x}_0 = \bar{x}_2 = 1$ et $\bar{x}_1 = -2$.

Ainsi

/2

L'équation $8x^3 - 12x^2 - 18x + 27 = 0$ a pour racine $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (double) et $-2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ (simple)

C. Méthode de Cardan-Tartaglia : usage de la symétrie

Notons x_1, x_2 et x_3 les trois racines (complexes) de (2) : $x^3 = 3px + 2q$.

On notera également $j = e^{2i\pi/3}$

1. (a) Il s'agit d'appliquer la même méthode que pour l'exercice du DL1.

On a donc

$$x^3 - 3px - 2q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

On peut alors identifier (l'égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$) :

/1

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3p \quad x_1x_2x_3 = 2q$

(b) On a $0^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2$, ce qui se développe $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$.

/1

Et donc

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 6p$

(c) De même, $0^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3$, ce qui se développe

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2) + 6x_1x_2x_3 = 0$$

En additionnant et retranchant : $3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) :$

/2

$$-2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 3(x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_3^3) + 6x_1x_2x_3 = 0$$

$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = \frac{1}{2} (3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3) + 6x_1x_2x_3) = 6q$

2. (a) Les calculs donnent

$j^3 = \left(e^{2i\pi/3} \right)^3 = e^{2i\pi} = 1$

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$

$$j^a = j^b \iff j^0 = j^{b-a} = 1 \text{ (En multipliant par } j^{-a} \text{ ou } j^a)$$

$$j^a = j^b \iff e^{(i2\pi/3)(b-a)} = e^{i0} \iff \frac{2\pi}{3}(b-a) \equiv 0[2\pi] \iff (b-a) \equiv 0[3]$$

Bilan :

/2

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad j^a = j^b \iff (b-a) \equiv 0[3]$

(b) La somme d'une suite géométrique permet d'affirmer :

/1

$$\boxed{1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0}$$

3. On considère $u = \frac{1}{3}(x_1 + jx_2 + j^2x_3)$ et $v = \frac{1}{3}(x_1 + jx_3 + j^2x_2)$.

(a) Comme $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et $j + j^2 = -1$, on a

$$u + v = \frac{1}{3}(2x_1 + (j + j^2)(x_2 + x_3)) = \frac{1}{3}(2x_1 + (-1)(-x_1))$$

Et donc

/1

$$\boxed{u + v = x_1}$$

(b) De même, comme $j^4 = j$ et $j^3 = 1$:

/1

$$\boxed{ju + j^2v = \frac{1}{3}((j + j^2)(x_1 + x_2) + 2x_3) = x_3 \quad j^2u + jv = \frac{1}{3}((j + j^2)(x_1 + x_3) + 2x_2) = x_2}$$

(c) Puis, en exploitant $j^4 = j$, $j + j^2 = -1$ et les relations en C.1. :

/2

$$\begin{aligned} uv &= \frac{1}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + jx_1x_3 + j^2x_1x_2 + jx_2x_1 + j^2x_2x_3 + j^2x_3x_1 + jx_3x_2) \\ &= \frac{1}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (j + j^2)[x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3]) = \frac{1}{9}(6p - [-3p]) = p \end{aligned}$$

4. On note $\alpha = \left(\frac{1}{3}(x_1 + jx_2 + j^2x_3)\right)^3$ et $\beta = \left(\frac{1}{3}(x_1 + jx_3 + j^2x_2)\right)^3$.

On note $\alpha_{k,\ell,m} = \left(\frac{1}{3}(x_k + jx_\ell + j^2x_m)\right)^3$ et $\beta_{k,\ell,m} = \left(\frac{1}{3}(x_k + jx_m + j^2x_\ell)\right)^3$.

(a) On a

$$\alpha_{2,3,1} = \left(\frac{1}{3}(x_2 + jx_3 + j^2x_1)\right)^3 = \left(\frac{1}{3}(j^3x_2 + j^4x_3 + j^2x_1)\right)^3 = \left(\frac{1}{3}(j^2(x_1 + jx_2 + j^2x_3))\right)^3 = j^3\alpha$$

Et donc, comme $\beta_{2,1,3} = \alpha_{2,3,1}$ (il suffit de l'écrire), et que $j^3 = 1$:

/1

$$\boxed{\alpha_{2,3,1} = \beta_{2,1,3} = \alpha}$$

(b) On peut compléter le tableau suivant

/1

(k, ℓ, m)	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(2, 3, 1)$	$(2, 1, 3)$	$(3, 1, 2)$	$(3, 2, 1)$
$\alpha_{k,\ell,m}$	α	β	α	β	α	β
$\beta_{k,\ell,m}$	β	α	β	α	β	α

REMARQUE : Cela signifie que les permutations sur x_i n'affectent pas les valeurs de l'ensemble $\{\alpha, \beta\}$. Si l'on trouve α et β , on trouvera (à permutation près) les trois racines x_1 , x_2 et x_3

5. D'après les résultats précédents :

/0,5

(a)

$$\boxed{\alpha\beta = u^3v^3 = (uv)^3 = p^3}$$

(b) Toujours avec les propriétés de j :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= u^3 + v^3 = \frac{1}{27}(2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 12x_1x_2x_3 + 3(j + j^2)(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2)) \\ &= \frac{1}{27}(2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 12x_1x_2x_3 - 3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2)) \\ &= \frac{1}{27}(5(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 12x_1x_2x_3 - 3(x_1^2(x_1 + x_2 + x_3) + x_2^2(x_1 + x_2 + x_3) + x_3^2(x_1 + x_2 + x_3))) \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha + \beta = \frac{1}{27}(5(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3) + 12x_1x_2x_3)}$$

Continuons :

/1,5

$$\boxed{\alpha + \beta = \frac{1}{27}(30q + 24q) = 2q}$$

(c) Enfin

/1

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 - 2qx + p^3$$

6. On suit la démarche de l'énoncé. En première partie, on a fait la première transformation. En posant $\bar{x} = x - \frac{1}{2}$, on a $\bar{x}$ racine de $x^3 = 3x - 2$.

Par conséquent, on a $p = 1$ et $q = -1$.

Ensuite, α et β sont les racines du polynôme : $x^2 - 2qx + p^3 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.

On trouve donc $\alpha = \beta = -1$. Il faut calculer ensuite $u = \sqrt[3]{\alpha} = -1$ et $v = \sqrt[3]{\beta} = -1$ pour obtenir

/2

$$x_1 = u + v = -2 \quad x_2 = ju + j^2v = -j - j^2 = 1 \quad \text{et} \quad x_3 = j^2u + jv = 1$$