Devoir Surveillé n°2
CORRECTION

Dans la marge, vous trouverez les coefficients de chaque question pour la notation.

Exercice 1

On note $\varphi : \theta \mapsto \cos\theta$. Il s'agit d'une bijection (décroissante), de classe $\mathcal{C}^1$, de $[0, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans $[0,1]$. On peut donc faire le changement de variable $x = \varphi(\theta)$, /1
comme $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ et $\varphi'(\theta) = -\sin\theta$, on a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta + 2}\mathrm{d}\theta = \int_1^0 \frac{1-x^2}{x^2+2x+2}(-\mathrm{d}x) = \int_0^1 \frac{1-x^2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$$

En faisant la division euclidienne de $1-x^2$ par x^2+2x+2 : $-x^2+1 = -(x^2+2x+2)+2x+3$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{2x+3}{x^2+2x+2} - 1\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+2} - 1 + \frac{1}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x$$

Et comme la dérivée de $x \mapsto x^2+2x+2$ est $x \mapsto 2x+2$ et que $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, on a donc /3

$$I = \left[\ln|x^2+2x+2| - x + \arctan(x+1)\right]_0^1 = \ln(5) - \ln(2) - 1 + \arctan(2) - \arctan(1)$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta + 2}\mathrm{d}\theta = \ln\frac{5}{2} + \arctan\frac{1}{3} - 1 (\approx 0,23804\dots)}$$

Exercice 2

1. Si $x = y = 0$, on a un problème pour la première équation. Et de même pour les autres. /0.5

$$\boxed{\text{Donc l'étude de } (S) \text{ peut être réduite à une étude sur } E = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\}}$$

2. On a l'implication : $x^2 = \dfrac{3x-y}{x-3y} \Longrightarrow (3x-y) = x^2(x-3y)$.

   Concernant la réciproque, il faut s'assurer que nécessairement $x - 3y \neq 0$, i.e. $x \neq 3y$.
   Or si $(3x-y) = x^2(x-3y)$ et $x - 3y = 0$, on aurait $3x - y = 0$,
   et donc $9x = 3y = x$, donc $x = 0$ et $y = 0$.
   Il n'y a donc pas de solution de $(3x-y) = x^2(x-3y)$, avec $x - 3y = 0$ autre que $(0,0)$.
   Ainsi, comme on se place sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, on a également :

$$x^2 = \frac{3x-y}{x-3y} \Longleftarrow (3x-y) = x^2(x-3y)$$

   On peut donc affirmer, que sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, on a la suite d'équivalences :

$$x^2 = \frac{3x-y}{x-3y} \Longleftrightarrow (3x-y) = x^2(x-3y) = x^3 - 3x^2y \Longleftrightarrow y(1-3x^2) = 3x - x^3$$

   Là encore, pour diviser par $1-3x^2$, il faut s'assurer que $1 - 3x^2 \neq 0$.
   Supposons le contraire, donc que $3x^2 = 1$, dans ce cas $3x - x^3 = x(3-x^2) = 0$.
   Si $x = 0$, on aurait $1 - 3x^2 = 1 \neq 0$.
   et si $3 - x^2 = 0$, alors $x^2 = 3 = \frac{1}{3}$, c'est impossible.
   Donc l'équation n'a pas de solution avec $1 - 3x^2 = 0$, et on a donc la dernière équivalence :

$$x^2 = \frac{3x-y}{x-3y} \Longleftrightarrow y = \frac{3x-x^3}{1-3x^2}$$

   De même pour les autres équations, on a donc l'équivalence (équations par équations) /3

$$\boxed{\forall\,(x,y,z)\in E \qquad (S)\left\{\begin{array}{rcl} x^2 &=& \dfrac{3x-y}{x-3y} \\ y^2 &=& \dfrac{3y-z}{y-3z} \\ z^2 &=& \dfrac{3z-x}{z-3x} \end{array}\right. \Longleftrightarrow (S)\left\{\begin{array}{rcl} y &=& \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} \\ z &=& \dfrac{3y-y^3}{1-3y^2} \\ x &=& \dfrac{3z-z^3}{1-3z^2} \end{array}\right.}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, donc $\tan\theta$ et $\tan 3\theta$ existent bien,

   $$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = e^{3i\theta} = (e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

   Donc, en prenant les parties réelle et imaginaire :

   $$\tan 3\theta = \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} = \frac{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta}{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta}$$

   puis en divisant tout par $\cos^3\theta \neq 0$ /2

   $$\boxed{\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, par bijection de la fonction arctan définie de $\mathbb{R}$ sur $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, il existe u tel que $\tan u = x$ ($u = \arctan x$).
   On a alors

   $$y = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3\tan u - \tan^3 u}{1 - 3\tan^2 u} = \tan 3u \text{ puis } z = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} = \frac{3\tan(3u) - \tan^3(3u)}{1 - 3\tan^2(3u)} = \tan 9u$$

   On a donc démontré : /1

   $$\boxed{\text{il existe } u \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } x = \tan u \text{ et alors } y = \tan 3u \text{ puis } z = \tan 9u}$$

5. On peut continuer selon la même stratégie :

   $$\tan u = x = \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3\tan(9u) - \tan^3(9u)}{1 - 3\tan^2(9u)} = \tan 27u$$

   Cela permet d'affirmer /1

   $$\boxed{u \equiv 27u[\pi]}$$

6. On obtient donc $26u \equiv 0[\pi]$ et donc $u \equiv 0\left[\frac{\pi}{26}\right]$, avec $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Dans ce cas, au bout de cette analyse, x doit prendre les 25 valeurs :

   $$\tan\frac{-12\pi}{26} = \tan\frac{-6\pi}{13}, \quad \tan\frac{-11\pi}{26}, \quad \dots \quad \tan 0 = 0, \quad \tan\frac{\pi}{26}, \quad \dots \quad \tan\frac{12\pi}{26} = \tan\frac{6\pi}{13}$$

   Cela conduit aux tableaux suivants, selon les 25 valeurs distinctes prises par k : /2

k	-12	-11	$\cdots$	0	1	$\cdots$	12
x	$\tan\frac{-6\pi}{13}$	$\tan\frac{-11\pi}{26}$	$\cdots$	$\tan 0 = 0$	$\tan\frac{\pi}{26}$	$\dots$	$\tan\frac{6\pi}{13}$
y	$\tan\frac{-18\pi}{13} = \tan\frac{-5}{13}$	$\tan\frac{-33\pi}{26} = \tan\frac{-7\pi}{26}$	$\cdots$	0	$\tan\frac{3\pi}{26}$	$\dots$	$\tan\frac{5\pi}{13}$
z	$\tan\frac{-15\pi}{13} = \tan\frac{-2\pi}{13}$	$\tan\frac{-21\pi}{26}$	$\cdots$	0	$\tan\frac{9\pi}{26}$	$\dots$	$\tan\frac{2\pi}{13}$

   Réciproquement il faut vérifier chacun des calculs. Cela ne pose pas de problème.

Problème

Préliminaires. A propos des applications homographiques

1. Soit $A, A', A'' \in (\mathbb{K}^4)^*$.
   — Comme $A = 1A$, avec $\lambda = 1$, on montre que $\doteq$ est reflexive.
   — Si $A \doteq A'$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ tel que $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$, $c = \lambda c'$ et $d = \lambda d'$.
   en prenant $\mu = \dfrac{1}{\lambda} \neq 0$, on a $a' = \mu a$, $b' = \mu b$, $c' = \mu c$ et $d' = \mu d$.
   On a donc alors $A' \doteq A$. Donc $\doteq$ est symétrique.
   — Si $A \doteq A'$ et $A' \doteq A''$,
   alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ tel que $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$, $c = \lambda c'$ et $d = \lambda d'$.
   et il existe $\lambda' \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ tel que $a' = \lambda' a''$, $b' = \lambda' b''$, $c' = \lambda' c''$ et $d' = \lambda' d''$.
   En prenant $\mu = \lambda\lambda' \neq 0$, on a $a = \mu a''$, $b = \mu b''$, $c = \mu c''$ et $d = \mu d''$.
   On a donc alors $A \doteq A''$. Donc $\doteq$ est transitive. /1

   $$\boxed{\text{On a ainsi démontré que la relation } \doteq \text{ définie sur } (\mathbb{K}^4)^* \text{ est une relation d'équivalence.}}$$

2. On suppose que $ad-bc=0$. Soient $x,y\in\mathbb{K}$ avec $x\neq y$,
$$f(x)-f(y)=\frac{(ax+b)(cy+d)-(ay+b)(cx+d)}{(cx+d)(cy+d)}=\frac{(ad-bc)(x-y)}{(cx+d)(cy+d)}=0$$
Donc,
$$\boxed{\text{si } ad-bc=0, \text{ alors } f_A \text{ est une application constante}}$$
Si $d\neq 0$, on a pour tout $x\in\mathbb{K}$, $f_A(x)=f_A(0)=\frac{b}{d}$
et si $d=0$, alors $bc=0$ et comme $c\neq 0$ (sinon $A\notin\overline{\mathbb{K}^4}$), donc $b=0$ et $f_A: x\mapsto \dfrac{ax}{cx}=\frac{a}{c}$
Ainsi /1
$$\boxed{\text{dans ce cas } f_A=\tfrac{b}{d}=\tfrac{a}{c}, \text{ si } d\neq 0 \text{ et/ou } c\neq 0}$$
Les deux nombres d et c ne pouvant être nul en même temps.

3. Soit $A=(a,b,c,d)$ et $A'=(a',b',c',d')$, avec $ad-bc\neq 0$.
Si $A\doteqdot A'$, alors /0,5
$$f_A(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\lambda a'x+\lambda b'}{\lambda c'x+\lambda d'}=f_{A'}(x)$$
Réciproquement, si $f_A=f_{A'}$, alors
$$\forall\ x\in\mathbb{K}, \frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a'x+b'}{c'x+d'}$$
$$\forall\ x\in\mathbb{K}, (ac'-a'c)x^2+(bc'+ad'-b'c-a'd)x+(bd'-b'd)=0$$
On peut identifier au polynôme nul, donc
$$\left\{\begin{array}{rcl} ac'-a'c &=& 0\\ bc'+ad'-b'c-a'd &=& 0\\ bd'-b'd &=& 0\end{array}\right.$$
Comme au moins c ou d est non nul, on peut considérer par exemple $c\neq 0$, puis $\lambda=\frac{c'}{c}$.
Si c'est $d\neq 0$, on prend $\lambda=\frac{d'}{d}$....
On a donc
$$\left\{\begin{array}{rcl} c' &=& \lambda c\\ a' &=& \frac{c'}{c}a=\lambda a\\ bc'+ad'-b'c-a'd &=& \lambda bc+ad'-b'c-\lambda ad=(\lambda b-b')c-(\lambda d-d')a=0\\ bd'-b'd &=& 0\end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{rcl} a' &=& \lambda a\\ c' &=& \lambda c\\ (\lambda b-b')c &=& (\lambda d-d')a\\ bd'-b'd &=& 0\end{array}\right.$$
Les deux dernières équations donnent (impliquent) : $d'=\lambda d+\frac{c}{a}(b'-\lambda b)$ puis
$$0=bd'-b'd=\lambda bd+\frac{bc}{a}(b'-\lambda b)-b'd=\frac{\lambda abd+bcb'-\lambda b^2c-b'ad}{a}$$
Et donc, en factorisant le numérateur :
$$0=\frac{(\lambda b-b')(ad-bc)}{a}$$
Et comme on a $ad-bc\neq 0$, alors nécessairement $b'=\lambda b$.
Et enfin, comme $bd'=b'd$, on a donc $b(d'-\lambda d)=0$ et donc $b=0$, ou $d'=\lambda d$.
Or si $b=0$, on a $b'=0$ et donc l'équation $(\lambda b-b')c-(\lambda d-d')a=0$
donne également $d'=\lambda d$ ($a\neq 0$).
Donc dans tous les cas : $b'=\lambda b$ et $d'=\lambda d$.
Par conséquent, si $f_A=f_{A'}$ alors $A\doteqdot A'$. On a donc démontré l'équivalence : /1,5
$$\boxed{\text{si } ad-bc\neq 0, \text{ alors : } f_A=f_{A'} \text{ si et seulement si } A\doteqdot A'}$$

4. Soit $f\in E^*$, il existe donc $A_1=(a_1,b_1,c_1,d_1)\in\overline{\mathbb{K}^4}$, tel que $a_1d_1-b_1c_1\neq 0$ et $f=f_{A_1}$. Faisons un raisonnement sous la forme analyse-synthèse.

— Si il existe $A = (a, b, c, d)$ normalisé tel que $f_A = f$, alors d'après 3, $A \doteq A_1$.
Et donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ tel que $a = \lambda a_1$, $b = \lambda b_1$, $c = \lambda c_1$ et $d = \lambda d_1$.
Par conséquent, $1 = ad - bc = \lambda^2(a_1d_1 - b_1c_1)$ et donc comme $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$, et donc il existe deux nombres λ et $-\lambda$ racines de $\dfrac{1}{a_1d_1 - b_1c_1}$ (qui peut être complexe).

— réciproquement si $\mu = a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$, et λ une racine de $\frac{1}{\mu}$ et enfin $A = \lambda A_1 = (a, b, c, d)$.
On a donc $A \doteq A_1$, donc $f_A = f_{A_1} = f$ et $ad - bc = \lambda^2(a_1d_1 - b_Ac_1) = \frac{1}{\mu}(a_1d_1 - b_1c_1) = 1$.

Par analyse-synthèse, /1

$$\boxed{\text{pour tout } f \in E^*, \text{ il existe exactement deux quadruplet } A \in \overline{\mathbb{K}^4}, \text{ normalisé tel que } f = f_A}.$$

5. Soient $A = (a, b, c, d)$ et $A' = (a', b', c', d') \in \mathbb{K}^4$.

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \qquad f_{A'} \circ f_A(x) = \frac{a'\dfrac{ax+b}{cx+d} + b'}{c'\dfrac{ax+b}{cx+d} + d'} = \frac{a'ax + a'b + b'cx + b'd}{c'ax + c'b + d'cx + d'd}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \qquad f_{A'} \circ f_A(x) = \frac{(a'a + b'c)x + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)x + (c'b + d'd)}$$

On a donc bien (il s'agit juste d'une vérification $f_{A''}$ est bien égale à $f_{A'} \circ f_A$). /1,5

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour } A = (a, b, c, d) \text{ et } A' = (a', b', c', d') \in \mathbb{K}^4 \text{ et } A'' = (a'a + b'c, a'b + b'd, c'a + d'c, c'b + d'd),\\ \text{on a } f_{A'} \circ f_A = f_{A''}\end{array}}$$

Notons que $A'' \in \overline{\mathbb{K}^4}$, sinon $c'a + d'c = 0$ et $c'b + d'd = 0$ /0,5

6. On considère $A = (a, b, c, d) \in E^*$, puis $\overline{A} = (d, -b, -c, a)$.
D'après la question précédente, en notant $A'' = (ad + b(-c), a(-b) + ba, cd + d(-c), c(-b) + da) = (ad - bc, 0, 0, ad - bc)$, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \qquad f_A \circ f_{\overline{A}}(x) = f_{A''}(x) = \frac{(ad - bc)x}{ad - bc} = x$$

car $ad - bc \neq 0$. Donc $f_A \circ f_{\overline{A}} = \mathrm{id}$.
Et de même : $f_{\overline{A}} \circ f_A = f_{A'''}$ avec $A''' = (da + (-b)c, db + (-b)d, (-c)a + ac, (-c)b + ad) = (ad - bc, 0, 0, ad - bc) = A''$ Donc /1

$$\boxed{f_A \circ f_{\overline{A}} = f_{\overline{A}} \circ f_A = \mathrm{id}}$$

7. D'après les questions précédentes, /0,5

$$\boxed{\text{pour toute } f \text{ de } E^*, \text{ il existe } A = (a, b, c, d) \text{ telle que } f = f_A \text{ et } f \text{ est inversible avec } f^{-1} = f_{d,-b,-c,a}}$$

Mais il n'y a pas unicité d'écriture, en particulier tout $A' \doteq (d, -b, -c, a)$ vérifie $f^{-1} = f_{A'}$

A. Suite récurrente définie à partir d'une homographie

1. On suppose que $p_A = c(x - \alpha)(x - \beta)$, avec $\alpha \neq \beta$
   (a) Si $\alpha = \frac{a}{c}$, comme $c\alpha^2 - a\alpha + d\alpha - b = 0$, on aurait donc $0 = c\alpha^2 - a\alpha$ et $c\alpha^2 - a\alpha = b - d\alpha$.
   Par conséquent $b - d\frac{a}{c} = 0$ et donc $ad - bc = 0$, ce qui est impossible.
   Le raisonnement est identique pour β. Donc /0,5

$$\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont différents de } \tfrac{c}{a}.}$$

   (b) Notons l'équivalence :

$$ax + bcx + d = x \Longleftrightarrow ax + b = cx^2 + dx \Longleftrightarrow p_A(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \alpha \text{ ou } x = \beta$$

   On suppose que $u_0 = \alpha$ (resp. $u_0 = \beta$).
   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $u_n = \alpha$ »(resp. « $u_n = \beta$ »)
   — $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, donc $u_n = \alpha$ (resp. $u_n = \beta$).

$$u_{n+1} = f_A(u_n) = f_A(\alpha) = \alpha$$

d'après la remarque initiale.
(De même si $u_n = \beta$, alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(\beta) = \beta$).
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. */1,5*

$$\boxed{\text{si } u_0 = \alpha, \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha \text{ et si } u_0 = \beta, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \beta}$$

(c) On suppose donc que $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$.
On fait un raisonnement par l'absurde, si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \alpha$.
Alors $\dfrac{au_{n-1}+b}{cu_{n-1}+d} = \alpha$, donc (d'après la formule d'inversion) : $u_{n-1} = \dfrac{d\alpha - b}{-c\alpha + a}$.
Or $p_A(\alpha) = c\alpha^2 + d\alpha - a\alpha - b = 0$, donc $d\alpha - b = \alpha(a - c\alpha)$ et ainsi $u_{n-1} = \alpha$.
On notera que grâce à la première question, on sait que $a + c\alpha \neq 0$.
Notons $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid u_n = \alpha\}$.
On sait que n_0 existe bien car par hypothèse $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n = \alpha\} \neq \emptyset$.
Et alors $u_{n_0} = \alpha$ alors que $u_{n_0-1} \neq \alpha$. Cela est impossible. */1,5*

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \neq \alpha.}$$

(d) On considère alors $v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ et $q = \dfrac{c\alpha + d}{c\beta + d}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{u_{n+1}-\beta}{u_{n+1}-\alpha}}{\dfrac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}} = \frac{\big(f(u_n) - f(\beta)\big)\big(u_n - \alpha\big)}{\big(f(u_n) - f(\alpha)\big)\big(u_n - \beta\big)}$$

Or,

$$\frac{(u_n - \alpha)}{\big(f(u_n) - f(\alpha)\big)} = \frac{u_n - \alpha}{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}} = \frac{(u_n - \alpha)(cu_n + d)(c\alpha + d)}{(au_n + b)(c\alpha + d) - (cu_n + d)(a\alpha + b)}$$

$$= \frac{(u_n - \alpha)(cu_n + d)(c\alpha + d)}{(bc - ad)\alpha + (ad - bc)u_n} = \frac{(cu_n + d)(c\alpha + d)}{ad - bc}$$

On a de même avec β (par symétrie) :

$$\frac{(u_n - \beta)}{\big(f(u_n) - f(\beta)\big)} = \frac{(cu_n + d)(c\beta + d)}{ad - bc}$$

Puis en retournant à la première fraction, */2*

$$\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(cu_n + d)(c\alpha + d)}{ad - bc} \times \frac{ad - bc}{(cu_n + d)(c\beta + d)} = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d} = q}$$

(e) La suite (v_n) est donc géométrique de raison q, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = q^n v_0$.
Puis comme $v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$, on a donc $u_n = \dfrac{-\alpha v_n + \beta}{-v_n + 1} = \dfrac{\alpha q^n v_0 - \beta}{q^n v_0 - 1}$
Finalement, on a une expression explicite (pas facile) : */1*

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{\alpha q^n \frac{u_0 - \beta}{u_0 - \alpha} - \beta}{q^n \frac{u_0 - \beta}{u_0 - \alpha} - 1} \text{ avec } q = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d}}$$

(f) On rappelle que $q = \dfrac{c\alpha + d}{c\beta + d}$.
— si $|q| < 1$, alors $(u_n) \to \beta$
— si $|q| > 1$ alors $(u_n) \to \alpha$ (terme dominant en facteur)
— si $|q| = 1$, alors $q = -1$ (en effet $q = 1$ est impossible sinon on aurait $\alpha = \beta$) et la suite ne peut pas converger.

Bilan : */1*

$$\boxed{(u_n) \longrightarrow \begin{cases} \beta & \text{si } |c\alpha + d| < |c\beta + d| \\ \alpha & \text{si } |c\alpha + d| > |c\beta + d| \\ \text{diverge} & \text{si } c(\alpha + \beta) + 2d = 0 \end{cases}}$$

Questions à aborder seulement s'il reste du temps

2. On suppose que $p_A = c(x-\alpha)^2$
   (a) Il s'agit exactement de la même démonstration qu'en 1.(b).
   (b) Là encore, si $u_n = \alpha$, alors $u_{n-1} = \alpha$.
   Par argument de type descente infinie, ou par l'absurde en considérant $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid u_n = \alpha\}$, on trouve une contradiction.
   Il ne peut exister de $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \alpha$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-\alpha} - \frac{1}{u_n-\alpha} = \frac{u_n - u_{n+1}}{\big(f(u_n)-f(\alpha)\big)\big(u_n-\alpha\big)} = \frac{\dfrac{cu_n^2+(d-a)u_n-b}{cu_n+d}}{\big(f(u_n)-f(\alpha)\big)\big(u_n-\alpha\big)}$$

   Le même calcul qu'en 1.(d) donne

$$\frac{1}{\big(f(u_n)-f(\alpha)\big)\big(u_n-\alpha\big)} = \frac{(cu_n+d)(c\alpha+d)}{(ad-bc)(u_n-\alpha)^2}$$

   Donc

$$v_{n+1}-v_n = \frac{p_A(u_n)\times(cu_n+d)(c\alpha+d)}{(cu_n+d)(ad-bc)(u_n-\alpha)^2} = \frac{c(c\alpha+d)}{(ad-bc)}$$

   car $p_A(x) = c(x-\alpha)^2$.
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + r$ avec $r = \dfrac{c(c\alpha+d)}{ad-bc}$
   (d) La suite (v_n) est arithmétique de raison r.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n = \alpha + \frac{1}{v_0+nr} = \alpha + \frac{u_0-\alpha}{1+nr(u_0-\alpha)}$$
   (e) On a alors $\lim(u_n) = \alpha$, car $r \neq 0$ sinon $\alpha = -\frac{d}{c} = \frac{-b}{a}$ et $ad = bc$.

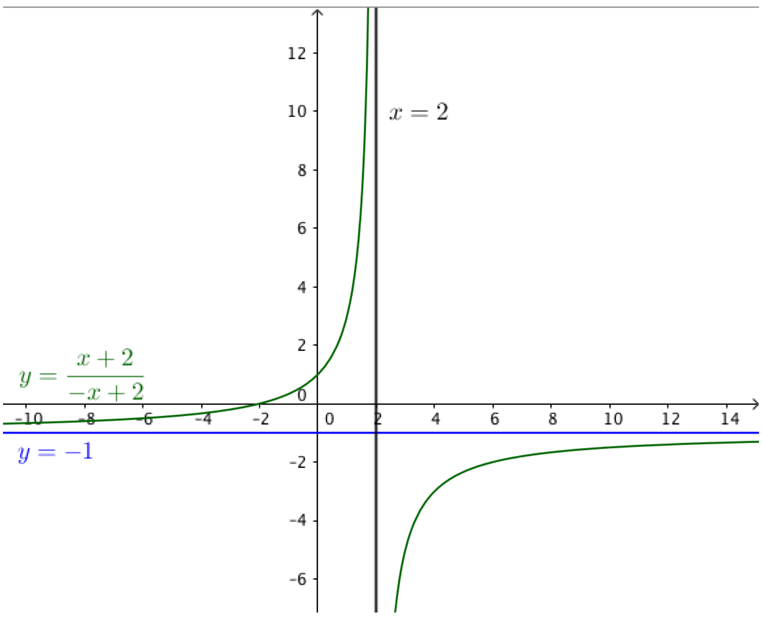
B. Etude des homographies, comme fonctions de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

1. La fonction f_A est définie sur $\mathcal{D}_A = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
   Sur cet ensemble, elle est dérivable et pour tout $x \in \mathcal{D}_A$:

$$f_A'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{1}{(cx+d)^2} \geqslant 0$$

   Donc f_A est strictement croissant et continue sur $]-\infty, -\frac{d}{c}[$
   donc établit une bijection de $]-\infty, -\frac{d}{c}[$ vers $]\lim_{-\infty} f_A, \lim_{(-\frac{d}{a})^-} f_A[=]-\frac{a}{c}, +\infty[$,
   et établit une seconde bijection de $]-\frac{d}{c}, +\infty[$ vers $]\lim_{(-\frac{d}{a})^+} f_A, \lim_{+\infty} f_A, [=]-\infty, -\frac{a}{c}[$,
   La courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{a}{c}$ et une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{d}{a}$. Il reste à tracer la courbe : /1

/1



2. On suppose que $\frac{-d}{c} \notin [0,1]$.
On commence par une division euclidienne : $ax+b = \frac{a}{c}(cx+d)+(b-\frac{ad}{c})$ $(c\neq 0)$. Par linéarité :

$$\int_0^1 f_A(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{ax+b}{cx+d}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{a}{c}\mathrm{d}x + \frac{bc-ad}{c}\int_0^1 \frac{1}{cx+d}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{a}{c}[x]_0^1 + \frac{1}{c^2}[\ln|cx+d|]_0^1$$

Donc /1,5

$$\boxed{\int_0^1 f_A(x)\mathrm{d}x = \frac{ac+\ln|\frac{c+d}{d}|}{c^2}}$$

On notera que comme $\frac{-d}{c}\notin[0,1]$, $x\mapsto cx+d$ est de signe constant sur $[0,1]$ et donc le signe de $c1+d=c+d$ et celui de $c0+d=d$ est le même et donc $|\frac{c+d}{d}| = \frac{c+d}{d}$

3. Approximation en 0. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On note $\varphi : x\mapsto (cx+d)f(x)-(ax+b)$.
   (a) On raisonne par équivalence pour chacune des trois questions qui suivent.

$$\varphi(x)=0 \Longleftrightarrow df(0)-b=0$$

/0,5

$$\boxed{\text{La relation } (\mathcal{R}_1) \text{ cherchée est } df(0)-b=0}$$

   (b) De même, φ est dérivable $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = cf(x)+(cx+d)f'(x)-a$$

/0,5

$$\boxed{\text{La relation } (\mathcal{R}_2) \text{ cherchée : } cf(0)+df'(0)-a=0}$$

   (c) De même, φ' est dérivable $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\varphi''(x) = 2cf'(x)+(cx+d)f''(x)$$

/0,5

$$\boxed{\text{La relation } (\mathcal{R}_3) \text{ cherchée : } 2cf'(0)+df''(0)=0}$$

   (d) Si $f'(0)=0$, alors on a $cf(0)=a$ et avec $(\mathcal{R}_1)$: $df(0)=b$. /0,5

$$\boxed{\text{On a donc } ad-bc = cf(0)d-df(0)c=0}$$

   (e) On suppose que $f'(0)\neq 0$. On va exprimer les variables a,b,c en fonction de d. Puis trouver une condition sur d.
   — Avec $(\mathcal{R}_1)$, $b=f(0)\times d$
   — Avec $(\mathcal{R}_3)$, $c=\frac{-f''(0)}{2f'(0)}\times d$ (car $f'(0)\neq 0$).
   — Avec $(\mathcal{R}_2)$, $a = cf(0)+df'(0) = \frac{-f''(0)f(0)+2\left(f'(0)\right)^2}{2f'(0)}\times d$
   — Enfin, puisque A est normalisé : $ad-bc=1$, donc

$$1=\left(\frac{-f''(0)f(0)+2\left(f'(0)\right)^2}{2f'(0)} - \frac{-f''(0)f(0)}{2f'(0)}\right)d^2 = f'(0)d^2$$

   (On voit que si $f'(0)=0$, on a un problème...)
   On a donc $d=\pm\frac{1}{\sqrt{f'(0)}}$ (par hypothèse, $f'(0)>0$) et puis :

$$(a,b,c,d)=\pm\left(\frac{-f''(0)f(0)+2\left(f'(0)\right)^2}{2\left(\sqrt{f'(0)}\right)^3};\frac{f(0)}{\sqrt{f'(0)}};\frac{-f''(0)}{2\left(\sqrt{f'(0)}\right)^3};\frac{1}{\sqrt{f'(0)}}\right)$$

   Il n'y alors qu'une solution telle que $c>0$: /1,5

$$\boxed{(a,b,c,d)=\epsilon\times\left(\frac{-f''(0)f(0)+2\left(f'(0)\right)^2}{2\left(\sqrt{f'(0)}\right)^3};\frac{f(0)}{\sqrt{f'(0)}};\frac{-f''(0)}{2\left(\sqrt{f'(0)}\right)^3};\frac{1}{\sqrt{f'(0)}}\right) \quad \text{avec } \epsilon=\begin{cases}1 & \text{si } f''(0)<0\\ -1 & \text{si } f''(0)>0\end{cases}}$$

(f) Soit $X > 0$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in]-X, X[$, $|\varphi^{(3)}(x)| \leqslant M$.
On intègre les inégalités, il faut faire attention à l'ordre des bornes. Si $x > 0$

$$\begin{aligned}
-M \leqslant \varphi^{(3)}(x) \leqslant M \quad &\Longrightarrow \quad -M\int_0^x \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \varphi^{(3)}(t)\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^x \mathrm{d}t \\
&\Longrightarrow \quad -Mx \leqslant \varphi^{(2)}(x)\mathrm{d}t \leqslant Mx \qquad \text{car } \varphi''(0) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad -M\int_0^x t\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \varphi^{(2)}(t)\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^x t\mathrm{d}t \\
&\Longrightarrow \quad -M\frac{x^2}{2} \leqslant \varphi'(x)\mathrm{d}t \leqslant M\frac{x^2}{2} \qquad \text{car } \varphi'(0) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad -M\int_0^x \frac{t^2}{2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \varphi'(t)\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^x \frac{t^2}{2}\mathrm{d}t \\
&\Longrightarrow \quad -M\frac{x^3}{6} \leqslant \varphi(x)\mathrm{d}t \leqslant M\frac{x^3}{6} \qquad \text{car } \varphi(0) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (ax+b) - M\frac{x^3}{6} \leqslant (cx+d)f(x)\mathrm{d}t \leqslant (ax+b) + M\frac{x^3}{6} \qquad \text{car } \varphi(0) = 0
\end{aligned}$$

Et donc, puisque $cx + d \neq 0$, car $-\frac{d}{c} \notin]-0, X[$:
pour tout $x \in [0, X]$: $f_A(x) - \frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d} \leqslant f(x) \leqslant f_A(x) + \frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d}$.
Dans le cas où $x < 0$, le raisonnement est le même sauf qu'on intégrera de x à 0, pour garder la croissance des bornes. La démarche est la même, et on obtient en fin de calcul :

$$-M\frac{-x^3}{6} \leqslant -\varphi(x)\mathrm{d}t \leqslant M\frac{-x^3}{6}$$

il suffit de multiplier par (-1) pour trouver le résultat attendu. /2

$$\boxed{\text{Ainsi pour tout } x \in]-X, X[,\ f_A(x) - \frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d} \leqslant f(x) \leqslant f_A(x) + \frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d}}$$

4. Application :
(a) Pour la fonction exponentielle, en 0, il faut considérer $f = f' = f'' = \exp$,
on considère donc : $(a, b, c, d) = (-\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}; -1)$ et on choisit la fonction déjà rencontrée en B.1. : /1

$$\boxed{f_A : x \mapsto \frac{-\frac{1}{2}x - 1}{\frac{1}{2}x - 1} = \frac{x+2}{-x+2}}$$

On admet que dans ce cas et pour $X = 1$, on trouve pour tout $x \in]-1, 1[$, $|\varphi^{(3)}(x)| \leqslant e$.
(b) On a donc d'après la partie précédente :

$$\forall\, x \in]-1, 1[\qquad -\frac{e}{6}\frac{x^3}{-x+2} \leqslant e^x - \frac{x+2}{-x+2} \leqslant \frac{e}{6}\frac{x^3}{-x+2}$$

Pour obtenir un logarithme, on peut intégrer entre 0 et 1 ces inégalités et exploiter la réponse à la question 2 ($-\frac{d}{c} = 2 \notin]0, 1[$).
Or d'après la question 2

$$\int_0^1 e^x - \frac{x+2}{-x+2} = (e^1 - 1) - \frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2}) + \ln\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{1}}{(-\frac{1}{2})^2} = (e^1 - 1) - (-1 + 4\ln\frac{1}{2}) = e - 4\ln 2$$

Alors que

$$\int_0^1 \frac{e}{6}\frac{x^3}{-x+2}\mathrm{d}x = \frac{e}{6}\int_0^1 \left(-x^2 - 2x - 4 + \frac{8}{-x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{e}{6}\left[\frac{-x^3}{3} - x^2 - 4x - 8\ln(|2-x|)\right]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{e}{6}\frac{x^3}{-x+2}\mathrm{d}x = \frac{e}{6}\left(-\frac{16}{3} + 8\ln 2\right)$$

Or d'après l'énoncé, $\frac{e}{6}\left(-\frac{16}{3} + 8\ln 2\right) \approx 0,095$, on a donc /2

$$\boxed{|4\ln 2 - e| \leqslant \frac{e}{6}\left(-\frac{16}{3} + 8\ln 2\right) \approx 0,095}$$

Le calcul donne $4\ln 2 = 2,772\ldots$

5. Approximation en x_0.
   On cherche à trouver f_A homographique approchant f en x_0.
   Or
   $$\boxed{\text{en considérant } \psi : h \mapsto (c(x_0+h)+d)\times f(x_0+h) - (a(x_0+h)+b),}$$
   on trouve une fonction ψ à étudier comme dans le cas 3, pour sa variable proche de 0.
   C'est la méthode employée pour les développements limités ailleurs qu'en 0 */1*

C. Etude des homographies, comme application de $\overline{\mathbb{C}}$ sur $\overline{\mathbb{C}}$

1. On obtient le tableau suivant qui donne l'image de Ω par f_A, selon A : */1,5*

$A=$	$(1,0,0,1)$	$(-1,1,0,1)$	$(1,0,1,-1)$	$(0,1,1,0)$	$(0,1,-1,1)$	$(1,-1,1,0)$
$f_A : z\mapsto ?$	$z\mapsto z$	$z\mapsto 1-z$	$z\mapsto \frac{z}{z-1}$	$z\mapsto \frac{1}{z}$	$z\mapsto \frac{1}{1-z}$	$z\mapsto \frac{z-1}{z}$
$f_A(\Omega)$	$(\infty,0,1)$	$(\infty,1,0)$	$(1,0,\infty)$	$(0,\infty,1)$	$(0,1,\infty)$	$(1,\infty,0)$

2. Soit $(u,v,w)\in\tau$.
   — Si $\infty\notin\{u,v,w\}$, alors on cherche $A=(a,b,c,d)$ tel que $F_A(\Omega,0,1)=(u,v,w)$.
   Or $F_A(\infty)=u=\frac{a}{c}$, $F_A(0)=v=\frac{b}{d}$ et $F_A(1)=w=\frac{a+b}{c+d}$.
   On a donc $a=uc$, $b=vd$, puis $w=\frac{uc+vd}{c+d}$, donc $(u-w)c=(w-v)d$.
   On a donc $a=u\dfrac{(w-v)}{u-w}\times d$, $b=v\times d$ et $c=\dfrac{(w-v)}{u-w}\times d$.
   Puis pour que A soit normalisé, il faut
   $$1=ad-bc=udc-vdc=\frac{(u-v)(w-v)}{u-w}d^2 \qquad \Longrightarrow d=\pm\sqrt{\frac{u-w}{(u-v)(w-v)}}$$
   On a par suite les valeurs de a,b et c. Ce qui donne donc exactement deux quadruplets solutions A_1 et A_2.
   Mais il code la même fonction f_A, puisque $A_1=-A_2$ et donc $A_1 \doteqdot A_2$
   — Si $u=\infty$. On trouve $c=0$ avec la condition $F_A(\infty)=\infty$, puis $F_A(0)=v=\frac{b}{d}$ et $F_A(1)=w=\frac{a+b}{c+d}$.
   Donc $b=vd$ et $a=(w-v)d$ et enfin $1=ad-0$, donc $d=\pm\sqrt{\dfrac{1}{w-v}}$. Ce qui donne donc exactement deux quadruplets équivalents.
   — Si $v=\infty$. On a $F_A(0)=\infty$, il faut un dénominateur nul en $z=0$, donc on trouve $d=0$
   Puis $F_A(\infty)=u=\frac{a}{c}$, donc $a=uc$ et $F_A(1)=w=\frac{a+b}{c+d}=\frac{uc+b}{c}=u+\frac{b}{c}$.
   On a donc $a=uc$, $b=(w-u)c$. Et enfin $1=0-bc$, donc $c=\pm\sqrt{\dfrac{1}{w-u}}$. Ce qui donne donc exactement deux quadruplets équivalents.
   — Si $w=\infty$. On trouve $F_A(1)=\infty$, il faut un dénominateur nul en $z=1$, donc on trouve $c+d=0$
   Puis $F_A(\infty)=u=\frac{a}{c}$, donc $a=uc$ et $F_A(0)=v=\frac{b}{d}$ donc $b=vd$.
   Et enfin $1=ad-bc=ucd-vcd=(v-u)d^2$, donc $d=\pm\sqrt{\dfrac{1}{v-u}}$. Ce qui donne donc exactement deux quadruplets équivalents.
   Ainsi, dans tous les cas, */2,5*
   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout triplet } (u,v,w)\in\tau,\text{ de points distincts,}\\ \quad\text{il existe une unique application } f_A\in E^*\text{ tel que } (u,v,w)=f_A(\Omega)\end{array}}$$

3. Soit $u,v,w,z\in\mathcal{P}$, on appelle birapport de ce quadruplet (u,v,w,z) le nombre noté $[u,v,w,z]$ obtenu par $f_A(z)$, où $f_A(u,v,w)=\Omega$.
   (a) Soit $(u,v,w,z)\in\mathcal{P}^4$, $[u,v,w,z]=f_A(z)$, avec A tel que $f_A(u,v,w)=\Omega$.
   On a vu qu'il existe (un unique) $A=(a,b,c,d)$ tel que $f_A : z\mapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$ (en fait une unique classe d'équivalence).
   Or $f_A(v)=0$, donc $av+b=0$, donc $(az+b)-(av+b)=az+b=a(z-v)$.
   De même $f_A(u)=\infty$, donc $cu+d=0$, donc $(cz+d)-(cu+d)=c(z-u)$.
   Ainsi $f_A(z)=\dfrac{a}{c}\dfrac{z-v}{z-u}$.
   Enfin, $f_A(w)=1=\dfrac{a}{c}\dfrac{w-v}{w-u}$, donc $\dfrac{a}{c}=\dfrac{w-u}{w-v}$
   Et finalement : $f_A(z)=\dfrac{w-u}{w-v}\times\dfrac{z-v}{z-u}$. Ce raisonnement qui est juste si $\infty\notin\{u,v,w\}$, reste */2*

vrai (par continuité) lorsque l'un des trois nombre est infini.
Donc /1

$$\boxed{\text{pour tout quadruplet } (u,v,w,z)\in\mathcal{P}^4,\ [u,v,w,z]=\frac{\frac{w-u}{w-v}}{\frac{z-u}{z-v}}}$$

(b) Soit un quadruplet $(u,v,w,z)\in\mathcal{P}^4$ et une homographie f, Il existe une homographie f_{A_1} tel que $f_{A_1}(u,v,w)=\Omega$ et une homographie f_{A_2} tel que $f_{A_2}\big(f(u),f(v),f(w)\big)=\Omega$.
On a donc $[u,v,w,z]=f_{A_1}(z)$ et $\forall\ Z\in\mathcal{P}$, $[f(u),f(v),f(w),Z]=f_{A_2}(Z)$.
Or $f_{A_2}\big(f(u),f(v),f(w)\big)=\Omega=f_{A_2}\circ f(u,v,w)=f_{A_1}(u,v,w)$.
Notons, que la composée de deux homographie est une homographie, donc $f_{A_2}\circ f$ est une homographie. Et nous avons vu l'unicité de la description homographique ayant pour image Ω, donc $f_{A_1}=f_{A_2}\circ f$ Et en particulier (avec $Z=f(z)$ /2

$$\boxed{[u,v,w,z]=f_{A_1}(z)=f_{A_2}\circ f(z)=f_{A_2}(f(z))=[f(u),f(v),f(w),f(z)]}$$