MPSI 3 - Fermat Le 03.02.18
2017-2018

Devoir surveillé n°6

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème - Paire complémentaire et polynôme de Rudin-Shapiro

Notations :
Soit ℓ un entier au moins égal à 1.
— Séquence et polynôme séquentiel.
Un vecteur $\underline{a}$ de $\mathbb{R}^\ell$ sera appelé *séquence de longueur* ℓ si chacune de ses ℓ coordonnées vaut 1 ou -1.
Les coordonnées d'une séquence $\underline{a}$ de longueur ℓ seront numérotées de 0 à $\ell-1$, $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1})$.
On notera $\mathcal{S}_\ell$ l'ensemble des séquences de longueur ℓ.
On appellera simplement *séquence*, tout vecteur qui est une séquence de longueur ℓ, pour un certain entier $\ell \geqslant 1$.
Pour toute séquence, $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1})$, de longueur ℓ, on définit le polynôme $P_{\underline{a}}$ par la formule

$$P_{\underline{a}}(X) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i X^i.$$

Un tel polynôme est appelé *polynôme séquentiel.*
— Paire complémentaire.
On dira que des séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une *paire complémentaire* si elles ont même longueur ℓ (qui sera appelée dorénavant *longueur de la paire*) et si elles vérifient, dans le cas où $\ell > 1$, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant \ell - 1$, la *$j$-ième condition de corrélation* :

$$\sum_{i=0}^{\ell-1-j} (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}) = 0.$$

Par convention, tout couple de séquences de longueur 1 est une paire complémentaire. Ainsi, pour tout entier $\ell \geqslant 1$, la complémentarité d'une paire de longueur ℓ implique $\ell - 1$ conditions de corrélation.
Si deux polynômes séquentiels sont associés à des séquences qui forment une paire complémentaire, on dit qu'ils forment une *paire complémentaire de polynômes.*

Dans la **partie I**, on s'intéresse à certaines propriétés des paires complémentaires, en particulier leur longueur.
Dans la **partie II**, on étudie une suite particulière de paire complémentaires de polynômes (les paires de Rudin-Shapiro).

I. Ensemble de paires complémentaires

On désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble des entiers ℓ pour lesquels il existe au moins une paire complémentaire de longueur ℓ. Autrement dit, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des longueurs de paires complémentaires. Dans cette partie, on se propose d'étudier certaines propriétés de l'ensemble $\mathcal{L}$.

1. Montrer que 2 appartient à $\mathcal{L}$ et que 3 n'appartient pas à $\mathcal{L}$.
2. (a) Ecrire un programme qui prend comme argument deux listes (séquences) A et B et test si elles forment un couple de paire complémentaire.
   (b) Donner un ordre de grandeur de la complexité (« dans le pire des cas ») de votre programme en fonction de la longueur des séquences considérées. Pour votre programme, y a-t-il une différence entre les valeurs de complexité « dans le pire des cas » et « dans le meilleur des cas » ?

3. Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences (non nécessairement de même longueur).
On considère la fonction définie pour x réel, $x \neq 0$, par

$$F_{\underline{a},\underline{b}} : x \mapsto P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}).$$

   (a) Exemple. On note $\underline{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$.
   Pour tout $x \neq 0$, exprimer $P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1})$ sous forme de combinaisons linéaires de puissances (parfois négatives) de x .

   (b) (*) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2 + \sum_{k=1}^{\ell-1} \left(\sum_{i=0}^{\ell-k-1} a_i a_{i+k} \right) (x^k + x^{-k})$$

   (c) Montrer que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ne sont pas deux séquences de même longueur, $F_{\underline{a},\underline{b}}$ n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$.

   (d) Montrer que deux séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de même longueur forment une paire complémentaire si et seulement si cette fonction est constante.
   Exprimer cette constante en fonction de la longueur ℓ de la paire complémentaire $\underline{a}$, $\underline{b}$.

   (e) Montrer que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des séquences de même longueur, $P_{\underline{a}}(1)$ et $P_{\underline{b}}(1)$ sont des entiers de même parité.
   (*) En déduire que tout élément de $\mathcal{L}$ peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

   (f) Montrer que le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{N}$ est un ensemble infini.
   on pourra étudier le reste de la division par 4 d'un carré d'entier.

4. (a) Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences de même longueur. On pose $U = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} + P_{\underline{b}})$ et $V = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} - P_{\underline{b}})$.
   Montrer que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire si et seulement si la fonction

$$x \mapsto U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1})$$

   est constante sur son domaine de définition.

   (b) Les séquences, de longueur 10,

$$\underline{a} = (1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1)$$

   et

$$\underline{b} = (1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1)$$

   forment-elles une paire complémentaire ?

5. Démontrer, pour toute séquence $\underline{v}$ de longueur paire $2m$ ($m \in \mathbb{N}$, non nul), l'équivalence des assertions suivantes :
   (i) 4 divise la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_{2m-1}$,
   (ii) le nombre de coordonnées de $\underline{v}$ égales à -1 a la même parité que m,
   (iii) $v_0 v_1 \ldots v_{2m-1} = (-1)^m$.

6. Soit $\ell \in \mathcal{L}$, $\ell \geqslant 2$, et soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences qui forment une paire complémentaire de longueur ℓ. Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant \ell - 1$, on pose $x_i = a_i b_i$.

   (a) Montrer que, pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant \ell - 1$,

$$\prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j} = (-1)^{\ell-j}$$

   On peut considérer la somme des coordonnées de la séquence $(a_0 a_j, \ldots, a_{\ell-1-j} a_{\ell-1}, b_0 b_j, \ldots, b_{\ell-1-j} b_{\ell-1})$.

   (b) En déduire que, pour tout entier j, $0 \leqslant j \leqslant \ell - 1$,

$$x_j x_{\ell-1-j} = -1.$$

   (c) Montrer que tout élément ℓ de $\mathcal{L}$, $\ell \geqslant 2$, est pair.

II. Paires de Rudin-Shapiro

Cette partie est consacrée à l'étude de certaines paires complémentaires de polynômes, dites *paires de Rudin-Shapiro.*

On définit deux suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions initiales

$$P_0(X) = Q_0(X) = 1$$

et les relations de récurrence

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= P_n(X) + X^{2^n} Q_n(X) &(1)\\ Q_{n+1}(X) &= P_n(X) - X^{2^n} Q_n(X). &(2) \end{aligned}$$

1. (a) Calculer P_1 et Q_1, puis P_2 et Q_2 et enfin P_3 et Q_3.
   (b) Calculer les valeurs de $P_n(1)$, $Q_n(1)$, $P_n(-1)$ et $Q_n(-1)$ en fonction de l'entier n.
   (c) Montrer que 0 n'est ni racine de P_n ni racine de Q_n.
   En déduire que $P_n \wedge Q_n = 1$
2. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\}$.
   Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$, et tout $n \in \mathbb{N}$

$$|P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2 = 2^{n+1}$$

3. Démontrer que, pour tout entier positif n, les polynômes P_n et Q_n sont des polynômes séquentiels et qu'ils forment une paire complémentaire.
   Prendre le temps de faire une belle démonstration...
   Qu'en déduire vis-à-vis de l'appartenance des entiers de la forme 2^k, pour k entier positif ou nul, à l'ensemble $\mathcal{L}$?
4. Démontrer, pour tout entier positif ou nul n et tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}$, l'égalité

$$Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1}).$$

5. (a) (*) Soit T un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$, de degré exactement d, $d \geqslant 1$, qu'on écrit $T(X) = t_0 + t_1X + \ldots + t_dX^d$ (avec t_d non nul).
   Montrer que les racines de T sont toutes majorées en module par la quantité

$$1 + \sup_{0\leqslant i\leqslant d-1} |t_i/t_d|$$

   On pourra faire une disjonction de cas selon le signe de $|z| - 1$
   (b) Démontrer, pour toute valeur de l'entier n, que toute racine (complexe) z du polynôme P_nQ_n vérifie

$$\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2.$$

   Peut-on remplacer chacune de ces deux inégalités larges par une inégalité stricte ?

⋆ ⋆ ⋆

Les polynômes étudiés dans ce problème ont été introduits lors de recherches sur la spectroscopie multi-fentes. Ils ont donné lieu à des développements mathématiques en combinatoire, théorie des codes, analyse harmonique, et à de très nombreuses applications en optique, télécommunications, théorie des radars et acoustique.

L'ensemble $\mathcal{L}$ étudié dans ce problème est encore actuellement l'objet de recherches.

⋆ ⋆
⋆