CPGE PC
2016-2017

Le 08.10.16

Devoir Surveillé n°2

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé de deux exercices et d'un problème.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice 1

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta + 2}\mathrm{d}\theta$$

On pourra commencer par justifier le changement de variable $x = \cos\theta$

Exercice 2

Dans cet exercice, on cherche à résoudre le système d'équations (non linéaires) d'inconnus x, y et z suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{ccc} x^2 & = & \dfrac{3x-y}{x-3y} \\ y^2 & = & \dfrac{3y-z}{y-3z} \\ z^2 & = & \dfrac{3z-x}{z-3x} \end{array}\right.$$

1. Montrer que l'on doit résoudre ce système sur $E = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\}$.
2. Montrer que sur E, S est équivalent au système $(S')\left\{\begin{array}{ccc} y & = & \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} \\ z & = & \dfrac{3y-y^3}{1-3y^2} \\ x & = & \dfrac{3z-z^3}{1-3z^2} \end{array}\right.$
3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$,
$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$
4. En déduire qu'il existe $u \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que
$$x = \tan u \qquad y = \tan 3u \qquad z = \tan 9u$$
5. Montrer alors que $u \equiv 27u[\pi]$
6. Résoudre le système (S). Combien existe-t-il de solutions différentes ?

Problème

Dans ce problème, nous étions un florilège de différentes propriétés des homographies

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Le préliminaire donne des résultats qui seront exploités dans les différentes parties. Mais ces dernières sont assez largement indépendantes entre elles.
Dans le problème, selon la partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ (partie B) ou $\mathbb{C}$ (parties A et C).

Préliminaires. A propos des applications homographiques

On note $\overline{\mathbb{K}^4} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4 \mid (c \neq 0) \text{ ou } (d \neq 0)\}$. Pour tout $A \in \overline{\mathbb{K}^4}$, on considère :

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array}$$

On dit que le 4-uplet $A = (a,b,c,d)$ est normalisé si $ad - bc = 1$.
On note $E = \{f_A, A \in \overline{\mathbb{K}^4}\}$ et $E^* = \{f_A, A \in \overline{\mathbb{K}^4} \text{ et } ad - bc \neq 0\}$

1. Montrer que la relation $\doteqdot$ définie sur $\overline{\mathbb{K}^4}$ par

$$\underbrace{A}_{=(a,b,c,d)} \doteqdot \underbrace{A'}_{=(a',b',c',d')} \iff \exists\ \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 \mid a = \lambda a', b = \lambda b', c = \lambda c', d = \lambda d'$$

   est une relation d'équivalence.
2. Montrer que si $ad - bc = 0$, alors f_A est une application constante. On donnera sa valeur.
3. On considère maintenant des homographie de E^*.
   Montrer que $f_A = f_{A'}$ si et seulement si $A \doteqdot A'$.
4. Montrer que pour tout $f \in E^*$, il existe exactement deux quadruplets $A, A' \in \mathbb{K}^4$, normalisés tel que $f = f_A = f_{A'}$.
5. Soient $A = (a,b,c,d)$ et $A' = (a',b',c',d') \in \overline{\mathbb{K}^4}$. Montrer que

$$f_{A'} \circ f_A = f_{A''}$$

   avec $A'' = (a'a + b'c, a'b + b'd, c'a + d'c, c'b + d'd)$.
   On verifiera que $A'' \in \overline{\mathbb{K}^4}$
6. On considère $A = (a,b,c,d) \in E^*$, puis $\overline{A} = (d, -b, -c, a)$. Que vaut $f_A \circ f_{\overline{A}}$ et $f_{\overline{A}} \circ f_A$?
7. En déduire que toute homographie f de E^* est inversible. Comment s'exprime f^{-1} ?

A. Suite récurrente définie à partir d'une homographie

Dans cette partie, on considère une homographie f_A de E^*.
On définit alors la suite (u_n) par récurrence (si possible) :

$$u_0 \in \mathbb{C} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $cu_n + d = 0$, alors on dit que la suite est mal définie.
On note p_A, l'application polynomiale :

$$p_A : x \mapsto cx^2 + (d-a)x - b$$

1. On suppose que $p_A = c(x-\alpha)(x-\beta)$, avec $\alpha \neq \beta$
   (a) Montrer que α et β sont différents de $\frac{a}{c}$.
   (b) Montrer que si $u_0 = \alpha$, ou $u_0 = \beta$, alors (u_n) n'est pas mal définie et est en fait une suite constante.
   (c) On suppose donc que $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$.
   Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \alpha$.
   (d) On considère alors $v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ et $q = \dfrac{c\alpha + d}{c\beta + d}$.
   On supposera que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $cu_n + d \neq 0$.
   (sinon, on arrête l'étude de la suite à l'étape $n_0 - 1$ tel que $cu_{n_0} + d = 0$).
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = qv_n$
   (e) En déduire que (u_n) est bien définie et une expression explicite de u_n en fonction de n (et α, β et q).
   (f) Selon la valeur de q, quelle est la limite de (u_n) ?

Questions à aborder seulement s'il reste du temps *(aucun point !)*

2. On suppose que $p_A = c(x-\alpha)^2$

   (a) Montrer que si $u_0 = \alpha$, alors (u_n) est bien définie et est en fait une suite constante.

   (b) On suppose donc que $u_0 \notin \{\alpha\}$.
   Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \alpha$.

   (c) On considère alors $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ et $r = c\dfrac{c\alpha + d}{ad - bc}$.
   On supposera que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $cu_n + d \neq 0$.
   (sinon, on arrête l'étude de la suite à l'étape $n_0 - 1$ tel que $cu_{n_0} + d = 0$).
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + r$

   (d) En déduire que (u_n) est bien définie et une expression explicite de u_n en fonction de n (et α, β et r).

   (e) Quelle est la limite de (u_n) ?

B. Etude des homographies, comme fonctions de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

On cherche dans cette partie à approcher les fonctions numériques par des homographies.
On considère dans toute cette partie :

— $A = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\underline{ad - bc = 1}$.
— on suppose que $\underline{c > 0}$!

1. Faire une étude complète de la fonction f_A (ensemble de définition, variations, limites et asymptotes).
   Pour la représentation graphique, on prendra $c = \frac{1}{2} = -a$ et $b = d = -1$.

2. On suppose que $\frac{-d}{c} \notin [0, 1]$. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 f_A(x)\mathrm{d}x$, en fonction de a, b, c et d.

3. Approximation en 0. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   On note $\varphi : x \mapsto (cx + d)f(x) - (ax + b)$, on suppose toujours $ad - bc \neq 0$.

   (a) Quelle relation nécessaire et suffisante $(\mathcal{R}_1)$ faut-il supposer sur a, b, c, d (en fonction de f) pour que $\varphi(0) = 0$

   (b) Quelle relation nécessaire et suffisante $(\mathcal{R}_2)$ faut-il supposer sur a, b, c, d (en fonction de f) pour que $\varphi'(0) = 0$

   (c) Quelle relation nécessaire et suffisante $(\mathcal{R}_3)$ faut-il supposer sur a, b, c, d (en fonction de f) pour que $\varphi''(0) = 0$

   (d) Montrer que si $f'(0) = 0$, alors pour que $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$ soient vérifiées, on doit avoir $ad - bc = 0$.

   (e) On suppose que $f'(0) > 0$. Exprimer la solutions (a, b, c, d) de $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3)$ vérifiant $ad - bc = 1$ et $c > 0$.

   (f) Soit $X > 0$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in]-X, X[$, $|\varphi^{(3)}(x)| \leqslant M$.
   On suppose également que $\frac{-d}{c} \notin]-X, X[$.
   Montrer que pour tout $x \in]-X, X[$, $f_A(x) - \frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d} \leqslant f(x) \leqslant f_A(x) + \frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d}$

4. Application :

   (a) Trouver $A = (a, b, c, d)$ normalisé tel que f_A approche au mieux la fonction exp en 0.
   On admet que dans ce cas et pour $X = 1$, on trouve pour tout $x \in]-1, 1[$, $|\varphi^{(3)}(x)| \leqslant e$.

   (b) En déduire que $|4\ln 2 - e| \leqslant \frac{e}{6}\left(-\frac{16}{3} + 8\ln 2\right)$.
   (On remarquera que $\frac{e}{6}\left(-\frac{16}{3} + 8\ln 2\right) \approx 0,095$.)

5. Approximation en x_0.
   En faisant le changement de variable $y = x - x_0$, montrer que l'on peut exploiter la méthode précédente (question 3) pour obtenir une approximation de f en x_0 par une fonction homographique.

C. Etude des homographies, comme application de $\overline{\mathbb{C}}$ sur $\overline{\mathbb{C}}$

On conserve dans cette dernière partie la notation $f_A : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Ici on considère le plan $\mathcal{P}$, muni d'un point à l'infini. On l'identifie à $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(Soufflez bien et ne stressez pas avec cette notation..., tout se passera bien).

Les éléments de $\mathcal{P}$ sont :

— soit de la forme $a + ib$ (nombre complexe classique)

— soit l'élément ∞.

Lorsqu'on aura à faire à un calcul avec ∞, il faudra penser comme s'il s'agissait de $\lim\limits_{x\to\infty} x$,

ainsi on notera en particulier que : $f_A(\infty) = \dfrac{a}{c}\big(= \lim_{x\to\infty} f_A(x)\big)$ et $f_A\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$,

et quelque fois, il y a des formes indeterminées...

On considère l'ensemble des triplets $\mathcal{P}$: $\tau = \{(u, v, w) \in \mathcal{P}\} = \mathcal{P}^3$,

et un triplet en particulier $\Omega = (\infty, 0, 1) \in \tau$.

Enfin, on notera pour tout $(u, v, w) \in \tau$, $f(\tau) = \big(f(u), f(v), f(w)\big)$,

en particulier $f_A(\Omega) = \big(f_A(\infty), f_A(0), f_A(1)\big)$.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant qui donne l'image de Ω par f_A, selon A :

$A =$	$(1,0,0,1)$	$(-1,1,0,1)$	$(1,0,1,-1)$	$(0,1,1,0)$	$(0,1,-1,1)$	$(1,-1,1,0)$
$f_A : z \mapsto ?$						
$f_A(\Omega)$						

On constatera que l'on obtient ainsi les six permutations de Ω.

2. Montrer que pour tout triplet $(u, v, w) \in \tau$ de trois nombres distincts,
   il existe exactement un unique $f_A \in E^*$ tel que $(u, v, w) = f_A(\Omega)$

3. Soit $u, v, w, z \in \mathcal{P}$, ($u, v, w$ distincts), il existe un unique $f \in E^*$ tel que $f(u, v, x) = \Omega$,
   on appelle alors birapport de (u, v, w, z) *le nombre noté* $[u, v, w, z]$ *obtenu par* $f(z)$.

   (a) Montrer que pour tout quadruplet $(u, v, w, z) \in \mathcal{P}^4$, $[u, v, w, z] = \frac{\frac{w-u}{w-v}}{\frac{z-u}{z-v}}$ (d'où le nom)

   (b) Montrer que pour tout quadruplet $(u, v, w, z) \in \mathcal{P}^4$ et toute homographie f,

$$[f(u), f(v), f(w), f(z)] = [u, v, w, z]$$