Devoir surveillé n°6
CORRECTION

Problème - Paire complémentaire et polynôme de Rudin-Shapiro

Le sujet proposé est librement inspiré de l'épreuve X-PC-2006.
Dans les commentaires de correction, on pourra lire des extraits du rapport du concours en question.
Ces extraits seront notés dans un cadre spécial : **extrait du rapport**

I. Ensemble de paires complémentaires

On désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble des entiers ℓ pour lesquels il existe au moins une paire complémentaire de longueur ℓ. Autrement dit, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des longueurs de paires complémentaires. Dans cette partie, on se propose d'étudier certaines propriétés de l'ensemble $\mathcal{L}$.

1. Dans le cas $\ell = 2$. Seule une condition de corrélation est à vérifier : la première.
Considérons $\underline{a} = (1, 1)$ et $\underline{b} = (1, -1)$.

$$\sum_{i=0}^{0}(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) = a_0 a_1 + b_0 b_1 = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{2 \text{ appartient à } \mathcal{L}}$$ */1*

Dans le cas $\ell = 3$. Il faut vérifier deux conditions de corrélation : $j = 1$ et $j = 2$.
Considérons $\underline{a} = (a_0, a_1, a_2)$ et $\underline{b} = (b_0, b_1, b_2)$. Supposons que $(\underline{a}, \underline{b})$ est une paire complémentaire.
La deuxième condition énonce :

$$\sum_{i=0}^{0}(a_i a_{i+2} + b_i b_{i+2}) = a_0 a_2 + b_0 b_2 = 0$$

Comme $a_i, b_j \in \{-1, 1\}$, pour que ce nombre soit nul, il faut nécessairement que a_0 et a_2 de même signe et b_0 et b_2 de signe contraire (ou l'inverse : b_0 et b_2 de même signe et a_0 et a_2 de signe contraire).
Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_0 = a_2$ et $b_0 \neq b_2$.
La première condition donne ensuite :

$$\sum_{i=0}^{1}(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) = a_0 a_1 + a_1 a_2 + b_0 b_1 + b_1 b_2 = 0$$

En exploitant ce que l'on sait sur $\underline{a}$ et $\underline{b}$, on a $2a_0 a_1 = 0$, c'est absurde puisque a_0 et $a_1 \in \{-1, 1\}$.
Donc, $(\underline{a}, \underline{b})$ ne peut pas être une paire complémentaire. Il n'en n'existe aucune de longueur 3. */2*

$$\boxed{3 \text{ n'appartient pas à } \mathcal{L}}$$

Extrait du rapport...
Il ne faut jamais se précipiter sur la première question d'un problème. Il est étonnant de constater le nombre de candidats qui ne savent pas manier la logique nécessaire à la réponse à la simple question : tel élément appartient-il à tel ensemble ? En l'occurrence il fallait simplement montrer qu'il existe au moins une *paire complémentaire de longueur 2, et qu'il* n'existe aucune *paire complémentaire de longueur 3. Une simple suite de calculs (ici très faciles) ne suffit pas à convaincre le correcteur de la logique infaillible du candidat !*

2. (a) Ici, on fait une boucle `for` avec une possibilité de sortie si le calcul ne donne pas 0.
Dans le même esprit, on aurait pu une boucle `while` avec deux conditions : sur la longueur et le calcul égal à 0.

/3

```
def Complementaire (A,B):
    """Test pour savoir si A et B sont complémentaires
    """
    l,m=len(A),len(B)
    if l==1 and m==1 :
            return(True)
    if m!=l :
            return(False)
    for j in range(1,l) :
            S=0
            for i in range(l-j)
                S=S+A[i]*A[i+j]+B[i]*B[i+j]
            if S!=0 :
               return(False)
    return(True)
```

(b) Le « meilleur des cas »correspond à une situation où les listes ne sont pas de même longueur, ou bien dès le premier calcul, on sait que les paires ne sont pas complémentaires. Cela donne une complexité en $O(1)$.
Le « pire des cas »correspond à une situation où tous les calculs sont nécessaires.
Dans la boucle repérée par i, il y a $K(\ell-j)$ calculs ($K=4$: 2 + et 2 $\times$).
Puis il y a ℓ telles boucles, avec j qui varie de 1 à $\ell-1$
donc il y a un nombre de calculs égal à (avec $h=\ell-j$) :

$$\sum_{j=1}^{\ell-1} K(\ell-j) = \sum_{h=1}^{\ell-1} K = K\frac{\ell(\ell-1)}{2}$$

Il faut additionner à ces calculs, des nombres constants (par rapport à ℓ).
Cela n'impacte pas la complexité algorithmique.
Dans cette situation, on a une complexité en $O(\ell^2)$. /2

> Dans le « pire des cas »la complexité algorithmique est en $O(\ell^2)$, dans le « meilleur des cas »elle est en $O(1)$

3. Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences (non nécessairement de même longueur).
On considère la fonction définie pour x réel, $x \neq 0$, par

$$F_{\underline{a},\underline{b}} : x \mapsto P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}).$$

Remarques !
On effectue le calcul, comme en début d'année, sans précipitation. A noter que les premières questions ici qui donne explicitement une expression de $F_{\underline{a},\underline{b}}$ ont été ajoutées par rapport au sujet initiale.

(a) Exemple. On note $\underline{a}=(a_0,a_1,a_2,a_3)$. Soit $x \neq 0$

$$P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right) \times \left(a_0+a_1\frac{1}{x}+a_2\frac{1}{x^2}+a_3\frac{1}{x^3}\right)$$

/1,5

$$\boxed{\begin{array}{c} P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = a_0a_3\frac{1}{x^3} + (a_0a_2+a_1a_3)\frac{1}{x^2} + (a_0a_1+a_1a_2+a_2a_3)\frac{1}{x} + (a_0a_0+a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3) \\ +(a_1a_0+a_2a_1+a_3a_2)x + (a_2a_0+a_3a_1)x^2 + a_3a_0x^3 \end{array}}$$

(b) Soit $x \neq 0$, on commence par calculer $P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1})$.

$$P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i x^i \times \sum_{j=0}^{\ell-1} a_j \frac{1}{x^j} = \sum_{i,j=0}^{\ell-1} a_i a_j x^{i-j}$$

On va regrouper ensemble les monômes de même degré $i-j$, mais avant cela on va séparer les cas $i=j$, $i<j$ et $i>j$ (le calcul de la question précédente nous inspire).

$$P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2}_{j=i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{i-1} a_i a_j x^{i-j}}_{j<i} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\ell-2}\sum_{j=i+1}^{\ell-1} a_i a_j x^{i-j}}_{j>i}$$

On considère donc une nouvelle variable $k = i - j$ dans la deuxième somme et $k' = j - i$ dans la troisième.

$$P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2 + \sum_{i=1}^{\ell-1}\sum_{k=1}^{i} a_i a_{i-k} x^k + \sum_{i=0}^{\ell-2}\sum_{k'=1}^{\ell-1-i} a_i a_{k'+i} x^{-k'}$$

Dans la seconde somme, on a la condition (en terme d'indices) : $1 \leqslant k \leqslant i \leqslant \ell - 1$,

et pour la troisième somme, on a les conditions : $\begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant \ell - 2 \\ 1 \leqslant k' \leqslant \ell - 1 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant k' \leqslant \ell - 1 \\ 0 \leqslant i \leqslant \ell - 1 - k' \end{cases}$

$$P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2 + \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=k}^{\ell-1} a_i a_{i-k}\right) x^k + \sum_{k'=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-1-k'} a_i a_{i+k'}\right) x^{-k'}$$

Enfin, on fait le changement de variable $i' = i - k$ dans la seconde somme et $i' = i$ dans la troisième

$$P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2 + \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i'=0}^{\ell-k-1} a_{i'+k} a_{i'}\right) x^k + \sum_{k'=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i'=0}^{\ell-1-k'} a_i a_{i+k'}\right) x^{-k'}$$

Et donc /4,5

$$\boxed{P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2 + \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-k-1} a_i a_{i+k}\right)\left(x^k + x^{-k}\right)}$$

(c) On suppose que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ne sont pas deux séquences de même longueur.
On peut, sans perte de généralité supposer que $\underline{a}$ est de longueur ℓ et $\underline{b}$ de longueur m avec $m < \ell$.
On a d'après le calcul précédent, pour tout $x \neq 0$:

$$F_{\underline{a},\underline{b}}(x) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2 + \sum_{i=0}^{\mathcal{A}-1} b_i^2 + \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-k-1} a_i a_{i+k}\right)\left(x^k + x^{-k}\right) + \sum_{k=1}^{m-1}\left(\sum_{i=0}^{m-k-1} b_i b_{i+k}\right)\left(x^k + x^{-k}\right)$$

Un équivalent de $F_{\underline{a},\underline{b}}(x)$ en $+\infty$ est donné par le monôme de plus grand degré ($k = \ell - 1$) :

$$F_{\underline{a},\underline{b}}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\sum_{i=0}^{\ell-(\ell-1)-1} a_i a_{i+\ell-1}\right) x^{\ell-1} = a_0 a_{\ell-1} x^{\ell-1} = \epsilon x^{\ell-1}$$

avec $\epsilon = a_0 a_{\ell-1} \in \{-1, 1\}$.
Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\underline{a},\underline{b}}(x) = \epsilon\infty$ /2

$$\boxed{\text{Si } \underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ ne sont pas deux séquences de même longueur, } F_{\underline{a},\underline{b}} \text{ n'est pas bornée sur }]0, +\infty[.}$$

(d) On suppose que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont de même longueur, notée ℓ.
D'après le calcul précédent :

$$F_{\underline{a},\underline{b}}(x) = \sum_{i=0}^{\ell-1}(a_i^2 + b_i^2) + \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-k-1} a_i a_{i+k} + b_i b_{i+k}\right)\left(x^k + x^{-k}\right)$$

— Si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire, alors, pour tout $k \in [\![1, \ell - 1]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell-k-1} a_i a_{i+k} + b_i b_{i+k} = 0$ et donc $F_{\underline{a},\underline{b}}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\ell-1}(a_i^2 + b_i^2) = 2\sum_{i=0}^{\ell-1} 1 = 2\ell$, car $a_i^2 = 1$ puisque $a_i \in \{-1, 1\}$. /2

— Réciproquement, supposons que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ne forment pas une paire complémentaire, alors, il existe $k \in [\![1, \ell - 1]\!]$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell-k-1} a_i a_{i+k} + b_i b_{i+k} \neq 0$.

Soit $k_0 = \max\{k \in [\![1, \ell - 1]\!]$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell-k-1} a_i a_{i+k} + b_i b_{i+k} \neq 0\}$ (ensemble non vide).

Alors, comme précédemment $F_{\underline{a},\underline{b}}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell-k_0-1} a_i a_{i+k_0} + b_i b_{i+k_0}\right) x^{k_0}$ et donc $F_{\underline{a},\underline{b}}(x)$ n'est pas bornée, donc ne peut être constant. /2

$\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire si et seulement si $F_{\underline{a},\underline{b}}(x)$ est constante. Dans ce cas $F_{\underline{a},\underline{b}}(x) = 2\ell$

Extrait du rapport...

Pratiquement aucun candidat n'a obtenu la note maximale à cette question, car la rédaction est difficile. Beaucoup parlent d'équivalence de polynômes. Mais sauf mention expresse du contraire, un polynôme en x n'a que des puissances positives de x, ce qui n'était évidemment pas le cas ici. Le plus sage était de s'en tenir à ≪ une somme finie de fonctions puissances x^k ≫, et d'invoquer les critères de comparaison de leurs croissances respectives en 0 ou en l'infini, après avoir soigneusement développé la formule proposée pour reconnaître les relations demandées. À ce sujet, trop nombreux sont les candidats qui n'isolent pas correctement les monômes degré par degré, avant de conclure hâtivement ≪par identification des degrés≫.

(e) Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des séquences de même longueur ℓ.
On note K, la nombre de -1 dans la séquence de $\underline{a}$.
On a donc $\ell - K$ fois le nombre 1 dans la séquence de $\underline{a}$,
et $P_{\underline{a}}(1) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i = (\ell - K) \times 1 + K \times (-1) = \ell - 2K$.
Et donc $P_{\underline{a}}(1) \equiv \ell[2]$, ce qui est indépendant de la séquence $\underline{a}$ considérée. */1,5*

si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont longueur ℓ, $P_{\underline{a}}(1)$ et $P_{\underline{b}}(1)$ sont des entiers de même parité, égale à celle de ℓ.

Soit $\ell \in \mathcal{L}$.
On considère $\underline{a}$ et $\underline{b}$ deux séquences qui forment une paire complémentaire de longueur ℓ.
On a vu à la question précédente que $2\ell = F_{\underline{a},\underline{b}}(x)$, indépendamment de $x \in]0, +\infty[$.
On choisit x tel que $x = x^{-1}$, donc $x = 1$:

$$2\ell = [P_{\underline{a}}(1)]^2 + [P_{\underline{b}}(1)]^2$$

Mais il y a ce facteur 2, qu'à cela ne tienne :

$$\left(\frac{P_{\underline{a}}(1) - P_{\underline{b}}(1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{P_{\underline{a}}(1) + P_{\underline{b}}(1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2[P_{\underline{a}}(1)]^2 + 2[P_{\underline{b}}(1)]^2\right) = \ell$$

Or ces nombres sont bien des entiers, car nous venons de voir que $P_{\underline{a}}(1)$ et $P_{\underline{b}}(1)$ sont de même parité. *4,5*

Ainsi, tout élément de $\mathcal{L}$ peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

Extrait du rapport...

La question sur la parité a été bien résolue, soit par récurrence ($a + b$ est toujours pair si a et b sont dans $\{-1; 1\}$!), soit par un argument ≪ à la main ≫.
Attention néanmoins à bien lire l'énoncé : plusieurs candidats ont supposé que a et b étaient complémentaires.
La décomposition en somme de carré a été massivement ratée. L'égalité immédiate était $2\ell = P_{\underline{a}}(1)^2 + P_{\underline{b}}(1)^2$. On pouvait alors par exemple écrire

$$\ell = \left(\frac{P_{\underline{a}}(1) - P_{\underline{b}}(1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{P_{\underline{a}}(1) + P_{\underline{b}}(1)}{2}\right)^2$$

La réussite à cette question est souvent allée de pair avec une bonne note sur l'ensemble du sujet !
Notons que le 2ℓ a perturbé bon nombre de candidats. Certains ont manifestement bidouillé en amont pour obtenir ℓ comme par magie. D'autres ont même supposé que le sujet devait être erroné !

(f) Si $\ell \in \mathcal{L}$, alors ℓ est somme de deux carrés.
Soient a et b tel que $\ell = a^2 + b^2$.
Or si $a \equiv 0[2]$, $a2 \equiv 0[4]$ et si $a \equiv 1[2]$, alors $a^2 \equiv 1[4]$.
Par conséquent, $a^2 + b^2 \equiv r[4]$ avec $r \in \{0 + 0, 1 + 0, 0 + 1, 1 + 1\} = \{0, 1, 2\}$ On note $\mathcal{A}_3 = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv 3[4]\}$. On en déduit que $\ell \notin \mathcal{A}_3$.
Cela signifie exactement que $\mathcal{A}_3$ est inclus dans le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{N}$.
Or $\mathcal{A}_3$ est un ensemble infini. */2,5*

le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{N}$ est un ensemble infini.

Extrait du rapport...

Cette question n'a pas eu beaucoup de succès. On peut supposer que peu de candidats sont à l'aise avec les raisonnements simples d'arithmétique. Il suffisait de remarquer qu'une somme de carrés d'entiers n'est jamais égale à 3 modulo 4. Le complémentaire de L est donc infini car il contient un ensemble infini, celui des entiers égaux à 3 modulo 4.

4. (a) Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences de même longueur. On pose $U = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} + P_{\underline{b}})$ et $V = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} - P_{\underline{b}})$.

$$U(x)U(x^{-1}) = \frac{1}{4}\left(P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}) + P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1})\right)$$

$$V(x)V(x^{-1}) = \frac{1}{4}\left(P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}) - P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}) - P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1})\right)$$

Donc pour tout $x > 0$:

$$U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = \frac{1}{2}\left(P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1})\right) = \frac{1}{2}F_{\underline{a},\underline{b}}(x)$$

On exploite alors la réponse à la question 2.(d) : *$/1{,}5$*

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ forment une paire complémentaire si et seulement si} \\ \text{la fonction } x \mapsto U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = \frac{1}{2}F_{\underline{a},\underline{b}}(x) \text{ est constante (égale à } \ell\text{) sur } \mathbb{R}^*.\end{array}}$$

Extrait du rapport...

C'est probablement la question qui a été le mieux résolue par les candidats. Il suffisait de développer l'expression. Certains (bons) candidats ont eu des états d'âmes sur ≪le domaine de définition≫, ce qui n'était ici pas crucial.

(b) Dans ce cas présent :

$$P_{\underline{a}}(X) = 1+X-X^2+X^3-X^4+X^5-X^6-X^7+X^8+X^9 \qquad P_{\underline{b}}(X) = 1+X-X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7-X^8-X^9$$

$$U = 1 + X - X^2 + X^3 + X^5 \qquad V = -X^4 - X^6 - X^7 + X^8 + X^9$$

Pour tout $x \neq 0$,

$$U(x)U(x^{-1}) = \left(1 + x - x^2 + x^3 + x^5\right)\times\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}\right) = 5-1(x+\frac{1}{x})+1(x^4+\frac{1}{x^4})+1(x^5+\frac{1}{x^5})$$

$$V(x)V(x^{-1}) = \left(-x^4 - x^6 - x^7 + x^8 + x^9\right)\times\left(-\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^9}\right) = 5+(x+\frac{1}{x})-(x^4+\frac{1}{x^4})-(x^5+\frac{1}{x^5})$$

Donc, pour tout $x \neq 0$, $U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = 10$ *$/2$*

$$\boxed{\text{Les séquences, } \underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ données forment une paire complémentaire.}}$$

Extrait du rapport...

Bête question de calcul. Bien sûr, l'usage du 3.a) permet de simplifier un peu, mais la vérification directe était également possible. On ne demande pas au candidat tous les détails du calcul, mais il doit justifier qu'il les a faits correctement. Affirmer que toutes les conditions de corrélations sont satisfaites sans en écrire au moins quelques unes n'est pas recevable.

5. Soit $\underline{v}$ une séquence de longueur paire égale à $2m$. On note K, le nombre de -1 dans la séquence.
On a vu plus haut que $P_{\underline{v}}(1) = 2m - 2K$.
Puis, comme $v_0 + \ldots + v_{2m-1} = P_{\underline{v}}(1)$, on a donc $v_0 + v_1 + \ldots + v_{2m-1} = P_{\underline{v}}(1) = 2(m - K)$.
On a donc les équivalences :

$$4|v_0 + v_1 + \ldots + v_{2m-1} \Longleftrightarrow 4|2(m-K) \Longleftrightarrow 2|m-K \Longleftrightarrow K \equiv m[2]$$

Donc (i) et (ii) sont équivalentes.

Puis comme $v_i \in \{-1, 1\}$, $\displaystyle\prod_{i=0}^{2m-1} v_i = (-1)^K \times 1^{2m-K} = (-1)^K$.

Ainsi on a les équivalences :

$$K \equiv m[2] \Longleftrightarrow (-1)^K = (-1)^m \Longleftrightarrow v_0v_1 \ldots v_{2m-1} = (-1)^m$$

Ainsi (ii) et (iii) sont équivalentes. *$/1{,}5$*

$$\boxed{\text{Finalement on a l'équivalence entre les trois propositions énoncés.}}$$

Extrait du rapport...

Ceux qui ont osé faire cette question se sont en général rendus compte qu'elle était facile. Seuls ceux qui ont eu le malheur de tenter une récurrence ne s'en sont pas sortis. Une récurrence était très difficile à utiliser ici. Des petits calculs modulo 2 ou 4 démontraient toutes les équivalences en quelques lignes.

6. Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant \ell - 1$, on pose $x_i = a_i b_i$.

   (a) Soit $j \in [\![1, \ell - 1]\!]$.
   Comme cela est proposé, on s'intéresse à la séquence $\underline{c} = (a_0 a_j, \dots, a_{\ell-1-j} a_{\ell-1}, b_0 b_j, \dots, b_{\ell-1-j} b_{\ell-1})$
   Alors la longueur de $\underline{c}$ est $2 \times (\ell - j) = 2m$, paire.
   Donc on a l'équivalence

$$4 | \sum_{i=0}^{2m-1} c_i \iff \prod_{i=0}^{2m-1} c_i = (-1)^m = (-1)^{\ell - j}$$

   Or, comme $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire,

$$\sum_{i=0}^{2m-1} c_i = \sum_{i=0}^{\ell-1-j} a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j} = 0$$

   Donc

$$(-1)^{\ell-j} = \prod_{i=0}^{2m-1} c_i = \prod_{i=0}^{m-1} a_i a_{i+j} \times \prod_{i=0}^{m-1} b_i b_{i+j} = \prod_{i=0}^{m-1} x_i x_{i+j}$$

/2,5

$$\boxed{\text{Pour tout entier } j,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell - 1,\ \prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j} = (-1)^{\ell - j}}$$

Extrait du rapport...

Les candidats ont souvent réussi à utiliser l'équivalence entre les points (i) et (iii) de la question précédente. Attention malgré tout à bien rappeler que la somme des coefficients (ici nulle) est bien divisible par 4 !

   (b) Soit $h \in [\![1, \ell - 2]\!]$. On peut alors appliquer la formule précédente appliquée en $j = h$ et $j = h + 1$

$$-1 = \frac{(-1)^{\ell-h}}{(-1)^{\ell-h-1}} = \frac{\prod_{k=0}^{\ell-1-h} x_k x_{k+h}}{\prod_{k=0}^{\ell-2-h} x_k x_{k+h+1}} = \frac{\prod_{k=0}^{\ell-1-h} x_k}{\prod_{k=0}^{\ell-2-h} x_k} \times \frac{\prod_{k=0}^{\ell-1-h} x_{k+h}}{\prod_{k=0}^{\ell-2-h} x_{k+h+1}} = x_{\ell-1-h} x_h$$

   Puis, pour $h = 0$ (et du même coup : ou $h = \ell - 1$) :
   On considère le résultat de la question précédente pour $j = \ell - 1$:

$$(-1)^{\ell-(\ell-1)} = \prod_{k=0}^{(\ell-1)-(\ell-1)} x_0 x_{0+(\ell-1)} \Longrightarrow -1 = x_0 x_{\ell-1}$$

/3

$$\boxed{\text{Donc pour tout entier } j,\ 0 \leqslant j \leqslant \ell - 1,\ x_j x_{\ell-1-j} = -1.}$$

Extrait du rapport...

Cette question s'est révélée très délicate pour les candidats. Il fallait soigneusement manipuler les indices pour s'en sortir par exemple avec une « récurrence finie », en vérifiant bien que les cas extrêmes ($j = 0$, $j = \ell - 1$) sont validés. On pouvait pour cela s'aider de la symétrie de la question en $j \leftrightarrow \ell - 1 - j$.

   (c) Si ℓ est impair, on considère $\ell = 2n + 1$, puis on a pour $j = n$

$$-1 = x_j x_{\ell-1-j} = x_n x_{2n+1-1-n} = (x_n)^2$$

   C'est impossible car $x_n^2 = 1$, donc ℓ ne peut être impair. /2

$$\boxed{\text{Tout élément } \ell \text{ de } \mathcal{L},\ \ell \geqslant 2, \text{ est pair.}}$$

Extrait du rapport...

Il fallait bien visualiser la suite des x_j , en liaison avec la question 5.b), pour trouver l'argument, qui tient sur une ligne. Encore une question qui a souvent distingué les bons candidats.

II. Paires de Rudin-Shapiro

Cette partie est consacrée à l'étude de certaines paires complémentaires de polynômes, dites *paires de Rudin-Shapiro*.

On définit deux suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions initiales

$$P_0(X) = Q_0(X) = 1$$

et les relations de récurrence

$$P_{n+1}(X) = P_n(X) + X^{2^n} Q_n(X) \quad (1)$$

$$Q_{n+1}(X) = P_n(X) - X^{2^n} Q_n(X). \quad (2)$$

1. (a) Les calculs sont immédiats et donnent /2

$$\boxed{\begin{array}{lll} P_1 = 1 + X & P_2 = 1 + X + X^2 - X^3 & P_3 = 1 + X + X^2 - X^3 + X^4 + X^5 - X^6 + X^7 \\ Q_1 = 1 - X & Q_2 = 1 + X - X^2 + X^3 & P_3 = 1 + X + X^2 - X^3 - X^4 - X^5 + X^6 - X^7 \end{array}}$$

Extrait du rapport...

La plupart des candidats ont bien abordé cette question facile, mais il y a eu des échecs malheureux (comme $P_1(x) = 1 + x^2$ ou $P_1(x) = 2$), même parmi les bons candidats.

(b) On remarque que $P_0(1) = 1$, $P_1(1) = 2$ ($P_2(1) = 2$ et $P_3(1) = 4$),
alors que $Q_0(1) = 1$, $Q_1(1) = 0$ ($Q_2(1) = 2$ et $Q_3(1) = 0$),
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\mathcal{H}_n$: « si $n = 2p$, $P_n(1) = 2^p = Q_n(1) = 2^p$. Et si $n = 2p + 1$, $P_n(1) = 2^{p+1}$ et $Q_n(1) = 0$ ».
— La relation $\mathcal{H}_n$ est vraie pour $n = 0$, $n = 1$ (et aussi $n = 2$, $n = 3$)
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
Si $n = 2p$. Alors $n + 1 = 2p + 1$ et

$$P_{n+1}(1) = P_n(1) + 1Q_n(1) = 2^p + 2^p = 2^{p+1}$$

$$Q_{n+1}(1) = P_n(1) - 1Q_n(1) = 2^p - 2^p = 0$$

On vérifie bien la formule attendue dans le cas $n + 1 = 2p + 1$, impair. Si $n = 2p + 1$. Alors $n + 1 = 2(p + 1)$ et

$$P_{n+1}(1) = P_n(1) + 1Q_n(1) = 2^{p+1} + 0 = 2^{p+1}$$

$$Q_{n+1}(1) = P_n(1) - 1Q_n(1) = 2^{p+1} - 0 = 2^{p+1}$$

On vérifie bien la formule attendue dans le cas $n+1 = 2(p+1)$, pair. Ainsi $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$.
Par récurrence, on a démontré : /2

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad P_n(1) = \left\{\begin{array}{ll} 2^p & \text{si } n = 2p \\ 2^{p+1} & \text{si } n = 2p+1 \end{array}\right. \qquad Q_n(1) = \left\{\begin{array}{ll} 2^p & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{array}\right.}$$

Pour le cas $x = -1$, on peut faire le même genre de raisonnement, ou exploiter des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_{n+2}(-1) = P_{n+1}(-1) + (-1)^{2^{n+1}} Q_{n+1}(-1) = P_{n+1}(-1) + Q_{n+1}(-1) = 2P_n(-1)$$

$$Q_{n+2}(-1) = P_{n+1}(-1) - (-1)^{2^{n+1}} Q_{n+1}(-1) = P_{n+1}(-1) - Q_{n+1}(-1) = 2(-1)^{2^{n+1}} Q_n(-1)$$

On a donc une régularité en deux temps.
Comme $P_0(-1) = Q_0(-1) = 1$, $P_1(-1) = 0$ et $Q_1(-1) = 2$,
les suites $(P_n(-1))_n$ et $(Q_n(1))_n$ vérifient les mêmes relations donc sont égales.
de mêmes les suites $(Q_n(-1))_n$ et $(P_n(1))_n$ vérifient les mêmes relations donc sont égales. /2

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad Q_n(-1) = \left\{\begin{array}{ll} 2^p & \text{si } n = 2p \\ 2^{p+1} & \text{si } n = 2p+1 \end{array}\right. \qquad P_n(-1) = \left\{\begin{array}{ll} 2^p & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{array}\right.}$$

Extrait du rapport...

L'abus de l'algèbre linéaire a joué un mauvais rôle dans cette question. Les candidats qui ont calculé deux ou trois premiers termes, puis deviné la formule générale, ont bien réussi. Mais les candidats qui ont essayé la méthode ≪matricielle≫ se sont perdus dans des calculs énormes et ne sont pratiquement jamais arrivés à la solution.
Une autre source d'erreurs était le manque d'attention. Un grand nombre de candidats ont bien noté que les relations de récurrence étaient les mêmes pour P et pour Q, sans observer que les conditions initiales étaient différentes.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(0) = P_n(0)$.
Il s'agit d'une suite constante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = P_0(0) = 1$ et donc $P_n(0) \neq 0$
De même pour tout $n \geqslant 1$, $Q_n(0) = P_{n-1}(0) = 1$ et $Q_0(0) = 1$,
donc pour tout entier n, $Q_n(0) \neq 0$ /1

$$\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } P_n \text{ ni de } Q_n.}$$

On note $D_n = P_n \wedge Q_n$.
On sait que $D_0 = P_0 \wedge Q_0 = 1$.
Et pour tout $U, V \in \mathbb{R}[X]$, $D_{n+1} | UP_{n+1} + VQ_{n+1}$.
Donc avec $U = V = 1$, on $D_{n+1}|2P_n$, donc $D_{n+1}|P_n$.
Et de même avec $U = -V = 1$, $D_{n+1}|2X^{2^n}Q_n$.
Or 0 n'est pas racine de P_{n+1} et Q_{n+1}, donc $D_{n+1} \wedge (X-0) = 1$ et $D_{n+1} \wedge X^{2^n} = 1$.
Et donc d'après le lemme de Gauss : $D_{n+1}|Q_n$.
Donc $D_{n+1}|P_n$ et $D_{n+1}|Q_n$ donc $D_{n+1}|D_n$.
Réciproquement : $D_n|P_n + X^{2^n}Q_n = P_{n+1}$ et $D_n|P_n - X^{2^n}Q_n = Q_{n+1}$.
Donc $D_n|D_{n+1}$.
Ainsi la suite (D_n) est constate égale à 1 /3

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad P_n \wedge Q_n = 1}$$

2. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|P_{n+1}(z)|^2 + |Q_{n+1}(z)|^2 &= |P_n(z) + z^{2^n}Q_n(z)|^2 + |P_n(z) - z^{2^n}Q_n(z)|^2 \\
&= (P_n(z) + z^{2^n}Q_n(z))(\overline{P_n(z)} + \overline{z}^{2^n}\overline{Q_n(z)}) + (P_n(z) - z^{2^n}Q_n(z))(\overline{P_n(z)} - \overline{z}^{2^n}\overline{Q_n(z)}) \\
&= |P_n(z)|^2 + |z|^{2^n}|Q_n(z)|^2 + 2\mathrm{Re}\big(\overline{P_n(z)}z^{2^n}Q_n(z)\big) + |P_n(z)|^2 + |z|^{2^n}|Q_n(z)|^2 - 2\mathrm{Re}\big(\overline{P_n(z)}z^{2^n}Q_n(z)\big) \\
&= 2(|P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2)
\end{aligned}$$

car $|z| = 1$, puisque $z \in \mathbb{U}$.
Ainsi, la suite $(r_n)_n = \big(|P_{n+1}(z)|^2 + |Q_{n+1}(z)|^2\big)_n$ est géométrique de raison égale à 2.
Comme $r_0 = 1 + 1 = 2$, on en déduit /1

$$\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{U}, \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \ |P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2 = 2^{n+1}}$$

3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $\deg P_n = \deg Q_n = 2^n - 1$, puis qu'ils sont séquentiels, et, finalement, qu'ils forment une paire complémentaire. »
— $\deg P_0 = \deg Q_0 = 0 = 1 - 1 = 2^0 - 1$;
les coefficients de P_0 et Q_0 sont dans $\{-1, 1\}$, donc P_0 et Q_0 sont séquentiels ;
Enfin ils forment la paire complémentaire particulière avec $\ell = 1$
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée.
$\deg P_n = 2^n - 1$, $\deg Q_n = 2^n - 1$, donc $\deg X^{2^n}Q_n = 2^n + 2^n - 1 = 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$
Comme le coefficient dominant de P_n ne peut annuler celui de $X^{2^n}Q_n$:
$\deg P_{n+1} = \deg(X^{2n}Q_n) = 2^{n+1} - 1$.
Un raisonnement, tout à fait équivalent, donne $\deg Q_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.
Mais on a « mieux », chaque monôme de degré h de P_{n+1} vient
exclusivement de P_n (si $h < 2^n$) ou exclusivement de Q_n (si $h \geqslant 2^n$).
Et de même pour Q_{n+1}
Plus précisément :

$$[P_{n+1}]_h = \begin{cases} [P_n]_h & \text{si } h < 2^n \\ [Q_n]_{h-2^n} & \text{si } h \geqslant 2^n \end{cases} \qquad [Q_{n+1}]_h = \begin{cases} [P_n]_h & \text{si } h < 2^n \\ -[Q_n]_{h-2^n} & \text{si } h \geqslant 2^n \end{cases}$$

Or P_n et Q_n sont séquentiels, d'après $\mathcal{P}_n$,
donc $[P_n]_h \in \{-1, 1\}$, $[Q_n]_{h-2n} \in \{-1, 1\}$ et $-[Q_n]_{h-2n} \in \{-1, 1\}$.
Ainsi P_{n+1} et Q_{n+1} sont séquentiels.

Dans l'énoncé, on donne naturellement une application de l'ensemble des séquences dans l'ensemble des polynômes séquentielles. Cette application est clairement bijective.

On peut donc noter $\underline{a_n}$, la séquence tel que $P_{\underline{a_n}} = P_n$.

De même, on définit $\underline{b_n}$, $\underline{a_{n+1}}$, et $\underline{b_{n+1}}$ tels que $P_{\underline{b_n}} = Q_n$, $P_{\underline{a_{n+1}}} = P_{n+1}$ et $P_{\underline{b_{n+1}}} = Q_{n+1}$.

Calculons $F_{\underline{a_{n+1}},\underline{b_{n+1}}}(x)$, pour $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
F_{\underline{a_{n+1}},\underline{b_{n+1}}}(x) &= P_{n+1}(x)P_{n+1}(x^{-1}) + Q_{n+1}(x)Q_{n+1}(x^{-1}) \\
&= \big(P_n(x) + x^{2^n}Q_n(x)\big)\big(P_n(x^{-1}) + x^{-2^n}Q_n(x^{-1})\big) + \big(P_n(x) - x^{2^n}Q_n(x)\big)\big(P_n(x^{-1}) - x^{-2^n}Q_n(x^{-1})\big) \\
&= 2P_n(x)P_n(x^{-1}) + 2Q_n(x)Q_n(x^{-1}) = 2F_{\underline{a_n},\underline{b_n}}(x)
\end{aligned}$$

Or d'après $\mathcal{P}_n$, $\underline{a_n}, \underline{b_n}$ forme une paire complémentaire.

donc $F_{\underline{a_n},\underline{b_n}}$ est une fonction constante.

donc $F_{\underline{a_{n+1}},\underline{b_{n+1}}}$ est une fonction constante.

Donc $\underline{a_{n+1}}, \underline{b_{n+1}}$ forme une paire complémentaire.

Ainsi P_{n+1} et Q_{n+1} sont des polynômes complémentaires.

On a montré, par récurrence /3,5

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout entier positif } n\text{, les polynômes } P_n \text{ et } Q_n \text{ sont des polynômes séquentiels (de degré } 2^n)\\ \text{et qu'ils forment une paire complémentaire.}\end{array}}$$

Ainsi, il existe, pour tout entier de la forme 2^k des paires complémentaires de longueur 2^k (les coefficients de P_n et Q_n). /0,5

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 2^k \in \mathcal{L}}$$

Extrait du rapport...

Pour réussir dans cette question on doit être très bien organisé. Il faut d'abord démontrer que $\deg P_n = \deg Q_n = 2^n$, puis qu'ils sont séquentiels, et, finalement, qu'ils forment une paire complémentaire. On peut le faire en une seule récurrence commune ou en trois récurrences séparées, mais l'ordre doit être comme indiqué ci-dessus.

Les candidats qui n'ont pas observé cet ordre ont raté la question.

Remarques !

Si $\{2^k, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}$, la réciproque est fausse.

On a vu que $10 \in \mathcal{L}$ en fin de première partie, mais en revanche, 10 n'est pas une puissance de 2

4. On va raisonner par récurrence.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n$: « $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1})$. »

— $Q_0(z) = 1 = (-1)^0 z^{1-1} P_0(-z^{-1})$, donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a donc $Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1})$,

mais aussi $Q_n(-z^{-1}) = (-1)^n (-1)^{2^n-1} z^{1-2^n} P_n(z) = (-1)^{n+1} z^{1-2^n} P_n(z)$. car $2^n - 1$ est impair.

Puis pour comme : $z^{2^{n+1}-1} = z^{2^n} z^{2^n-1}$:

$$\begin{aligned}
z^{2^{n+1}-1}P_{n+1}(-z^{-1}) &= z^{2^n} z^{2^n-1} P_n(-z^{-1}) + z^{2^n-1} z^{2^n} (-z^{-1})^{2^n} Q_n(-z^{-1}) \\
&= z^{2^n}(-1)^n Q_n(z) + z^{2^n-1}(-1)^{n+1} z^{1-2^n} P_n(z) \\
&= z^{2^n}(-1)^n Q_n(z) + (-1)^{n+1} P_n(z) = (-1)^{n+1}(P_n(z) - z^{2^n} Q_n(z)) \\
&= (-1)^{n+1} Q_{n+1}(z)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vérifiée. /3

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, z \in \mathbb{C}, \quad Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1}).}$$

Extrait du rapport...

Bien que ne requérant que des manipulations élémentaires de formules, cette question s'est révélée relativement difficile : peu de candidats l'ont tentée, encore moins l'ont résolue.

Remarques !

Que signifie cette relation ?
Si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots + a_{m-1}X^{m-1} + a_mX^m$ *avec* $m = 2^n - 1$*, le degré de* P*. Alors*

$$\begin{aligned} z^mP(-\tfrac{1}{z}) &= z^m\left(a_0 + a_1\tfrac{1}{z} + a_2\tfrac{1}{z^2} + a_3\tfrac{1}{z^3} + \cdots + a_{m-1}\tfrac{1}{z^{m-1}} + a_m\tfrac{1}{z^m}\right) \\ &= a_0z^m + a_1z^{m-1} + a_2z^{m-2} + a_3z^{m-3} + \cdots + a_{m-1}z + a_m \\ &= a_m + a_{m-1}z + a_{m-2}z^2 + \cdots + a_1z^{m-1} + a_0z^m \end{aligned}$$

Donc la relation précédente, signifie en gros qu'il y a une inversion dans l'ordre des coefficients de P *et de* Q *(il y aussi une multiplication par* -1 *une fois sur deux).*

5. (a) Soit T un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$, de degré exactement d, $d \geqslant 1$, qu'on écrit $T(X) = t_0 + t_1X + \ldots + t_dX^d$ (avec t_d non nul).
Soit z, une racine de T.
— Si $|z| \leqslant 1$, alors $|z| \leqslant 1 + \sup_{0\leqslant i\leqslant d-1} |t_i/t_d|$
— Si $|z| > 1$,

$$T(z) = 0 = \sum_{k=0}^{d} t_kz^k \Longrightarrow -t_dz^d = \sum_{k=0}^{d-1} t_kz^k \Longrightarrow z = -\sum_{k=0}^{d-1} \frac{t_k}{t_d} z^{k+1-d}$$

Par inégalité triangulaire :

$$|z| \leqslant \sum_{k=0}^{d-1} \left|\frac{t_k}{t_d}\right| |z|^{k+1-d} \leqslant M|z|^{1-d} \sum_{k=0}^{d-1} |z|^k$$

où $M = \sup_{0\leqslant 1\leqslant d-1} \left|\frac{t_i}{t_d}\right|$.

$$|z| \leqslant M|z|^{1-d}\frac{|z|^d - 1}{|z| - 1} = M|z|\frac{1 - |z|^{-d}}{|z| - 1}$$

Comme $|z| - 1 > 0$ et $|z| > 0$, on a donc

$$|z| - 1 \leqslant M(1 - |z|^{-d}) \leqslant M$$

Donc $|z| \leqslant 1 + M = 1 + \sup_{0\leqslant i\leqslant d-1} |t_i/t_d|$. /3

$\boxed{\text{Les racines de } T \text{ sont toutes majorées en module par la quantité } 1 + \sup_{0\leqslant i\leqslant d-1} |t_i/t_d|}$

Extrait du rapport...

Une des question les plus dures. Le nombre de candidats qui l'ont résolue n'excède pas 5. Il est difficile de trouver la méthode si l'on n'a pas déjà l'expérience d'exercices du même style.

(b) Soit z une racine de P_nQ_n, donc z est une racine de P_n ou (non exclusif) de Q_n.
On a applique la relation de la question précédente à P_n.
Dans ce cas $d = 2^n - 1$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{t_i}{t_d}\right| = 1$.
Donc $|z| \leqslant 1 + 1 = 2$.
De même en appliquant la même formule à Q_n, on trouve $|z| \leqslant 2$. /1
Par ailleurs, si z est racine de P_n, et $u = -\frac{1}{z}$,
alors d'après 5. : $Q_n(u) = (-1)^nu^{2^n-1}P_n(-\frac{1}{u}) = (-1)^nu^{2^n-1}P_n(z) = 0$.
Donc u est une racine de Q_n et donc d'après ce que l'on vient de voir : $|u| \leqslant 2$.
On en déduit que $\left|-\frac{1}{z}\right| \leqslant 2$ c'est-à-dire $|z| \geqslant \dfrac{1}{2}$.
De même on trouve également que $|z| \geqslant \dfrac{1}{2}$, si $|z|$ est racine de Q_n. /2
(On notera que $z \neq 0$, dans ce cas, mais on a vu que 0 n'est jamais racine de Q_n en 1.c))

$\boxed{\text{Pour toute valeur de l'entier } n\text{, toute racine } z \text{ du polynôme } P_nQ_n \text{ vérifie } \tfrac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2.}$

Pour savoir si l'inégalité peut être stricte, il suffit de montrer que z tel que $|z| = 2$ (et $|z| = \frac{1}{2}$) ne peut être racine de P_n (et Q_n).
Or P_n est un polynôme séquentielle de degré $2^n - 1$.
Notons $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} a_kX^k$ avec $a_k \in \{-1, 1\}$

Supposons $z = 2e^{i\theta}$ et que $P_n(z) = 0$.

Donc $P_n(z) = a_{2^n-1}2^{2^n-1}e^{i(2^n-1)\theta} + \sum_{k=0}^{2n-2} a_k 2^k e^{ik\theta} = 0$

ou encore $a_{2^n-1}2^{2^n-1} = -e^{-i(2^n-1)\theta} \sum_{k=0}^{2n-2} a_k 2^k e^{ik\theta}$.

Or $a_k \in \{-1, 1\}$, donc

$$\left| e^{-i(2^n-1)} \sum_{k=0}^{2n-2} a_k 2^k e^{ik\theta} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{2^n-2} 1 \times 2^k = \frac{2^{2^n-1}-1}{2-1} = 2^{2^n-1} - 1$$

Ainsi si $a_{2^n-1} = -1$, alors $2^{2^n-1} \leqslant 2^{2^n-1} - 1$, absurde
et si $a^{2^n-1} = 1$, alors $-2^{2^n-1} \geqslant -(2^{2^n} - 1)$, absurde également.

Par conséquent, si $|z| = 2$, alors $P_n(z) \neq 0$. De même $Q_n(z) \neq 0$.

Si $|z| = \frac{1}{2}$, en exploitant la relation de la question 4, on trouve $-\frac{1}{z}$ comme racine de Q_n.

Et donc Q_n admettrait une racine de module égal à 2. Ce qui est faux.

Bilan, on peut affirmer qu'en réalité : /3

$$\boxed{\text{Pour toute valeur de l'entier } n, \text{ toute racine } z \text{ du polynôme } P_nQ_n \text{ vérifie } \tfrac{1}{2} < |z| < 2.}$$

Extrait du rapport...

Relativement nombreux sont ceux qui ont démontré l'inégalité à droite (en admettant la question 5a). Beaucoup moins ont observé que l'inégalité à gauche est une conséquence de celle à droite et de la question 4. Personne n'a réussi à démontrer les inégalités strictes. Une faute typique : au lieu de regarder P_n et Q_n individuellement, on considère le produit P_nQ_n.