Devoir à la maison n°8
CORRECTION

Exercice 1

On note D l'application de dérivation de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même ($D : P \mapsto P'$) et S l'ensemble des polynômes scindés de $\mathbb{R}[X]$.

1. On peut supposer que P s'écrivent $\prod_{i=1}^{r}(X - x_i)^{\alpha_i}$, où $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$ et $\alpha_i \geqslant 1$.

Piste de recherche...
On notera que P est de degré $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i$.
Le principe est de montrer que chaque x_i est de racine d'ordre $\alpha_i - 1$ (si ce terme est positif), ce qui donne $\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i - 1) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i - r$. Il reste $r - 1$ racines à trouver ; elles se trouvent dans chaque intervalle de la form $]x_i, x_{i+1}[$.

Soit $i \in \mathbb{N}_r$.
On note $T_i = \prod_{j \neq i}(X - x_j)^{\alpha_j}$ de sorte que $P = (X - x_i)_i^{\alpha} T_i$.
Donc $P' = (X - x_i)^{\alpha_i - 1}[\alpha_i T_i + (X - \alpha_i)T_i']$.
Donc x_i est racine d'ordre au moins $\alpha_i - 1$.
Par ailleurs, la fonction $p : x \mapsto P(x)$ s'annule en x_i et x_{i+1} (on suppose $i < n$)
D'après le théorème de Rolle $\exists\ y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $p'(y_i) = 0 = P'(y_i)$.
Cela donne donc $r - 1$ nouvelles racines pour P'.
On a trouvé (au moins) : $\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i - 1) + (r - 1) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i - r + r - 1 = \deg P - 1 = \deg P'$ racines.

$$\boxed{\text{Si } P \in S, \text{ il en est de même de } P'}$$

Remarques !
Deux remarques :
- *Pour montrer que x_i est racine d'ordre $\alpha_i - 1$ de P',*
  on aurait pu tout simplement utiliser le fait que $(P')^{(h)}(x_i) = P^{(h+1)}(x_i) = 0$ si $h + 1 < \alpha_i$, donc $h < \alpha_i - 1$,
  alors que $(P')^{(h)}(x_i) = P^{(h+1)}(x_i) \neq 0$ si $h + 1 = \alpha_i$ donc $h = \alpha_i - 1$.
- *On notera aussi que pour les racines y_i, elles existent indépendamment du fait que p soit polynômiale. Seul le fait d'être de classe $\mathcal{C}^1$ pour p compte réellement.*

2. Comme précédemment (avec les mêmes notations),
- Si x_i est racine d'ordre α_i de P,
  elle est d'ordre (au moins) $\alpha_i - 1$ de P et de P' et donc de $P + \alpha P'$
- Puis on note $f : x \mapsto e^{\alpha x} P(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $f'(x) = [P'(x) + \alpha P(x)]e^{\alpha x}$.
  f s'annule en $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$, donc il existe $y_1, \ldots y_{r-1}$, dans $]x_i, x_{i+1}[$ respectivement tel que $f'(y_i) = 0 = [P'(y_i) + \alpha P(\alpha_i)]e^{\alpha x_i}$, donc $(P' + \alpha P)(y_i) = 0$
- Enfin, comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $f(x_1) = 0$, on applique une variante du théorème de Rolle.
  Supposons que $f'(x) > 0$, pour tout $x < x_1$. Donc f est strictement croissante sur $]-\infty, x_1[$.
  Soit $a < x_1$ et $A = f(a)$. Donc $\forall\ x < a < x_1$, $f(x) < A < f(x_1) = 0$.
  Il est alors impossible que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
  De même, on ne peut alors pour tout $x < x_1$, $f'(x) < 0$.
  Ainsi il existe $b, c \in]-\infty, x_1[$ tel que $f'(b) > 0$ et $f'(c) < 0$.
  On applique le théorème des valeurs intermédiaires à f', continue.
  Et il existe $y_0 \in]-\infty, x_1[$ tel que $f'(y_0) = 0$.

On a trouvé (au moins) : $\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i - 1) + (r - 1) + 1 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i - r + r = \deg P = \deg(P' + \alpha P)$ racines pour $P' + \alpha P$

$$\boxed{\text{Si } P \in S, \text{ il en est de même de } P' + \alpha P \text{ (pour tout } \alpha \in \mathbb{R}}$$

Remarques !

3. *Dans cette question, on a pour* $Q = \sum_{i=1}^{d} a_k X^k$, $Q(D) = \sum_{i=1}^{d} a_k D^k$,
où D^k *est la dérivation appliqué* D *fois* ($D^0 = Id$). *Ainsi*

$$\forall\ P, Q = \sum_{i=1}^{d} a_k X^k \in S, \qquad Q(D)(P) = \sum_{i=1}^{d} a_i P^{(i)}$$

On notera alors la factorisation (**avec la composition !**), *pour* $Q = (X-a_1)(X-a_2) = X^2 - (a_1+a_2)X + a_1a_2$:

$Q(D)(P) = P' - (a_1+a_2)P' + a_1a_2P$ *et* $[(D-a_1)\circ(D-a_2)](P) = D^2(P) - (a_1+a_2)D(P) + a_1a_2P$

On fais donc une récurrence sur le degré de Q. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $\forall\ P, Q \in S, \deg(Q) = n$, alors $Q(D)(P) \in S$ »

— Le cas $\mathcal{P}_0$ a été vu en première question et le cas $\mathcal{P}_1$ en seconde question.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Soit $Q \in S$, avec $\deg Q = n+1$. On peut suppose que $Q = (X-\alpha)T$, avec $\deg T = n$ et $T \in S$.

$$Q(D)(P) = [(D-\alpha)\circ T(D)](P) = (D-\alpha)(\overline{P}) = \overline{P}' - \alpha\overline{P}$$

où $\overline{P} = T(D)(P)$ est un polynôme de S d'après $\mathcal{P}_n$.
Puis en appliquant la réponse à la question 2 : $\overline{P}' - \alpha\overline{P} \in S$.
Par conséquent $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{On a montré le théorème de L}\textsc{aguerre} : \forall\ P, Q \in S, \qquad Q(D)(P) \in S}$$

4. Applications : Soit $P \in S$ avec $m = \deg P$.
On note $Q_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i = (1+X)^n$. Q_n est bien un élément de S.

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_1 = Q_n(D)(P) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} P^{(i)}(X) \text{ est élément de } S}$$

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_2 = P(D)(P) = \sum_{i=0}^{n} [P]_i P^{(i)}(X) \text{ est élément de } S}$$

Exercice 2

On se propose de détemriner les triplets (P, Q, R) de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$P^3 + Q^3 + R^3 = 0 \qquad (1)$$

1. On note $j = e^{2i\pi/3}$.

$$(P+Q)(P+jQ)(P+j^2Q) = P^3 + (1+j+j^2)P^2Q + (j+j^2+j^3)PQ^2 + j^3Q$$

Comme $j^3 = 1$ et $1+j+j^2 = 0$,

$$\boxed{(P+Q)(P+jQ)(P+j^2Q) = P^3 + Q^3}$$

2. On suppose que l'un des polynômes vérifiant (1) est nul.
Sans perte de généralité, on peut supposer que $R = 0$.
On a donc $P^3 + Q^3 = (P+Q)(P+jQ)(P+j^2Q) = 0$ On a alors, par intégrité, $P = -Q$, ou $P = -jQ$ ou $P = -j^2Q$.
La réciproque est vérifiée.

$$\boxed{\text{Si un des polynômes est nul, les autres sont } \omega\text{-colinéaire avec } \omega \in \{-1, -j, -j^2\}}$$

3. (a) Soit $D = PGCD(P, Q, R)$.
Alors $P = DP_1$, $Q = DQ_1$ et $R = DR_1$, avec $PGCD(P_1, Q_1, R_1) = 1$.
Et

$$0 = P^3 + Q^3 + R^3 = D^3(P_1^3 + Q_1^3 + R_1^3)$$

$$\boxed{\text{Donc l'équation (1) est vérifier pour } P_1,\ Q_1 \text{ et } R_1 \text{ premiers dans leur ensemble.}}$$

(b) On suppose que P, Q et R sont premiers dans leur ensemble.
Soit $D = PGCD(P,Q)$, alors $D|P^3$, $D|Q^3$, donc $D|R^3$.
Soit D_1, un facteur irréductible de D, il divise nécessairement R, mais aussi P et Q.
Donc leur PGCD qui vaut 1, donc $D_1 = 1$, il en est de même de D.

$$\boxed{P,\ Q \text{ et } R \text{ sont premiers entre eux deux à deux.}}$$

4. On suppose que $R = k$ constante, non nulle et (nécessairement) $P \wedge Q = 1$.
On a donc $P^3 + Q^3 = (P+Q)(P+jQ)(P+j^2Q) = -k^3$.
Puis $\deg(P+Q) + \deg(P+jQ) + \deg(P+j^2Q) = 0$.
Nécessairement chacun de ces degrés est inférieur à 0 sans être égal à $-\infty$.
Donc il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$, tel que $P+Q = a$, $P+jQ = b$, $P+j^2Q = c$ et $abc = -k^3$. On trouve (résolution de système avec les deux premières équations) : $P = \dfrac{b-ja}{1-j}$ et $Q = \dfrac{a-b}{1-j}$

$$\boxed{\text{Donc } P \text{ et } Q \text{ sont constants}}$$

Mieux, on trouve une condition d'existence :

$$P + j^2Q = \frac{b(1-j^2) + a(j^2-j)}{1-j} = b(1+j) - ja = \frac{-k}{ab}$$

5. On suppose maintenant qu'aucun des polynômes n'est constant et pour fixer les idées : $\deg R = \min(\deg P, \deg Q, \deg R)$. Comme précédemment : $-R^3 = (P+Q)(P+jQ)(P+j^2Q)$.
Décomposons R en produit en facteurs premiers : $R = \prod_{j=1}^{h} R_j^{\alpha_h}$. donc $R^3 = \prod_{j=1}^{h} R_j^{3\alpha_h}$.
Ainsi chaque R_j est un facteur d'au moins un des termes $(P+Q)$ ou $(P+jQ)$ ou $(P+j^2Q)$
Or P, Q sont premiers entre eux, donc $P+Q$, $P+jQ$ également.
Sinon, si D divise $P+Q$ et $P+jQ$, il divise $(P+Q)-(P+jQ) = (1-j)Q$
et D divise également $j(P+Q) - (P+jQ) = (j-1)P$,
et donc D divise Q et P, donc D divise 1 et $D = 1$.
De même $P+Q$, $P+j^2Q$ et $P+jQ$, $P+j^2Q$ sont premiers entre eux.
Ainsi R_j ne peut être facteur que d'un seul $(P+Q)$ ou $(P+jQ)$ ou $(P+j^2Q)$.
Finalement, on peut écrire
$$R = R_1 \times R_2 \times R_3$$
où $R_1^3 = P+Q$, $R_2^3 = P+jQ$ et $R_3^3 = P+j^2Q$, avec R_1, R_2 et R_3 premiers deux à deux.
Puis, on note que

$$R_1^3 + jR_2^3 + j^2R_3^3 = (P+Q) + j(P+jQ) + j^2(P+j^2Q) = (1+j+j^2)P + (1+j^2+j^4)Q = 0$$

Ainsi, avec $P_1 = e^{\frac{2i\pi}{9}} R_2$ et $Q_1 = e^{\frac{4i\pi}{9}} R_3$,

$$R_1^3 + P_1^3 + Q_1^3 = R_1^3 + jR_2^3 + j^2R_3^3 = 0$$

Ainsi (P_1, Q_1, R_1) solution de (1). Reste à étudier les degrés.
Si l'un des R_i était constant, alors l'un des P_1, Q_1 et R_1 serait constant et d'après la question précédente, ils seraient tous constant et également R. Cela n'est pas possible.
Donc pour tout $i \in \mathbb{N}_3$, $\deg R_i > 0$
et nécessairement, $\deg P_1 = \deg R_2 < \deg R$, $\deg Q_1 = \deg R_3 < \deg R$ et $\deg R_1 < \deg R$.

$$\boxed{\text{On a construit un triplet } (P_1, Q_1, R_1) \text{ solution de (1) et vérifiant } \deg R > \min(\deg P_1, \deg Q_1, \deg R_1).}$$

6. On fait une sorte de descente infinie (en montrant qu'un certain minorant n'existe pas).
Soit

$$A = \{\min(\deg P, \deg Q, \deg R) \mid PGCD(P,Q,R) = 1, P^3 + Q^3 + R^3 = 0, \deg P > 0, \deg Q > 0, \deg R > 0\}$$

Si A est non vide, comme $A \subset \mathbb{N}$, A admet un minimum α, associé à (P,Q,R)
Or on a vu qu'on pouvait réduire les degrés de cette famille et donc A admettrait un autre minimum.
C'est impossible et donc $A = \emptyset$.

Les seuls polynômes vérifiant (1) sont
- soit premiers entre eux (dans leurs ensembles) et sont donc des polynômes constants,
- soit proportionnels et donc de la forme (P, aP, bP) avec $1 + a^3 + b^3 = 0$.

Exercice 3

Soient a et b deux complexes, p et q deux entiers naturels non nuls et

$$F(X) = \frac{1}{(X-a)^p (X-b)^q}$$

1. D'après le cours, il existe $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}_p}$ et $(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}_q}$ tels que

$$F(X) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{(X-a)^i} + \sum_{j=1}^{q} \frac{\beta_j}{(X-b)^j}$$

Donc en multipliant par le polynôme $(X-b)^q$:

$$\frac{1}{(X-a)^p} = (X-b)^q \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{(X-a)^i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j (X-b)^{q-j}$$

On peut alors faire un développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^p}$ au voisinage de b.
On pose alors $u = x - b$; au voisinage de $u = 0$:

$$\frac{1}{(x-a)^p} = \frac{1}{(u+(b-a))^p} = \frac{1}{(b-a)^p}\frac{1}{\left(1+\frac{u}{b-a}\right)^p} = \frac{1}{(b-a)^p}\left(1+\frac{u}{b-a}\right)^{-p}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^p}\left(1 + \sum_{k=1}^{r} \frac{-p(-p-1)\dots(-p-k+1)}{k!}\frac{u^k}{(b-a)^k}\right) + o(u^r)$$

Par unicité du développement limité et comme $(x-b)^q \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{(x-a)^i} \longrightarrow 0$ pour $x \to b$,
on peut identifier le coefficient devant $u^k = (x-b)^k$:

$$\beta_{q-k} = \frac{1}{(b-a)^p} \times (-1)^k \frac{(p+k-1)!}{k!(p-1)!}\frac{1}{(b-a)^k} = (-1)^k \binom{p+k-1}{p-1}\frac{1}{(b-a)^{p+k}}$$

Donc

$$\boxed{\beta_j = (-1)^{q-j}\binom{p+q-j-1}{p-1}\frac{1}{(b-a)^{p+q-j}}}$$

Et de même par symétrie :

$$\boxed{\alpha_i = (-1)^{p-i}\binom{q+p-i-1}{q-1}\frac{1}{(a-b)^{q+p-i}}}$$

2. Pour $F(X) = \dfrac{1}{(X^2-1)^n}$, on trouve $a = 1$, $b = -1$, $p = q = n$ et donc

$$\alpha_i = (-1)^{n-i}\binom{2n-i-1}{n-1}\frac{1}{2^{2n-i}} \qquad \beta_j = (-1)^{n-j}\binom{2n-j-1}{n-1}\frac{(-1)^j}{2^{2n-j}}$$

$$\boxed{\frac{1}{(X^2-1)^n} = (-1)^n \sum_{i=1}^{n} \binom{2n-i-1}{n-1}\frac{1}{2^{2n-i}}\left(\frac{(-1)^i}{(X-1)^i} + \frac{1}{(X+1)^i}\right)}$$