Devoir à la maison n°8

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Trois petits exercices...

Exercice 1

On note D l'application de dérivation de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même ($D : P \mapsto P'$) et S l'ensemble des polynômes scindés de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que si $P \in S$, il en est de même de P'
2. Plus généralement, montre que si $P \in S$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $P' + \alpha P \in S$.
   On pourra considérer $x \mapsto e^{\alpha x} P(x)$
3. Encore plus généralement, montrer le théorème de Laguerre :
$$\forall\ P, Q \in S, \qquad Q(D)(P) \in S$$
4. Applications : Soit $P \in S$ avec $m = \deg P$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} P^{(i)}(X)$ et $P_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} [P]_k P^{(k)}$ sont éléments de S.

Exercice 2

On se propose de détemriner les triplets (P, Q, R) de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$P^3 + Q^3 + R^3 = 0 \qquad (1)$$

1. On note $j = e^{2i\pi/3}$. Calculer $(P + Q)(P + jQ)(P + j^2 Q)$
2. On suppose que l'un des polynômes vérifiant (1) est nul. Déterminer toutes les solutions de (1).
Par la suite on écartera ce cas.
3. (a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où P, Q et R sont premiers dans leur ensemble (i.e. aucun diviseur commun pour ces trois polynômes).
   (b) Montrer alors que P, Q et R sont premiers entre eux deux à deux.
4. On suppose que R est constant, non nul et $P \wedge Q = 1$.
   Montrer que P et Q sont constants
5. On suppose maintenant qu'aucun des polynômes n'est constant et pour fixer les idées : $\deg R = \min(\deg P, \deg Q, \deg R)$. Construire un triplet (P_1, Q_1, R_1) solution de 1 et vérifiant $\deg R > \min(\deg P_1, \deg Q_1, \deg R_1)$.
6. Conclure quant au solution de (1).

Exercice 3

Soient a et b deux complexes, p et q deux entiers naturels non nuls et

$$F(X) = \frac{1}{(X - a)^p (X - b)^q}$$

1. En utilisant un développement de Taylor de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^p}$ au point b, trouver la décomposition en éléments simples de $F(X)$.
2. Donner la décomposition de $\dfrac{1}{(X^2 - 1)^n}$