Devoir à la maison n°9

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Problème : Autour des matrices « normales »

Dans ce problème on s'intéresse aux matrices normales, pour cela nous avons besoin de deux définitions.

— Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle **conjugué de** A, la matrice $A^\star =^t \overline{A}$
($A^\star$ est la matrice transposée de la matrice conjuguée de A).

— On dit que A **est une matrice normale** si $A \times A^\star = A^\star \times A$ (notée $AA^\star = A^\star A$).

On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices normales de taillle n.

On définit également, pour tout sous-espace F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, l'orthogonal de F :

$$F^\perp = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mid \forall\, Y \in F, {}^t\overline{Y} \times X = 0\}$$

On notera bien que si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le produit ${}^tX \times Y$ est un nombre.

A. Exemples et premières propriétés

1. On considère $N = \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 0 \\ -2i & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix}$.
   (a) Que vaut $N^\star$?
   (b) N est-elle une matrice normale ?
2. Montrer que si A est une matrice inversible,
   alors $A^\star$ est également inversible et $(A^\star)^{-1} = (A^{-1})^\star$.
3. Montrer que s'il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A^\star = T(A)$. Alors A est une matrice normale.

B. Structures algébriques

1. Autour de $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Est-ce que $(\mathcal{N}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel ?
   (b) Est-ce que $(\mathcal{N}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe ?
2. Soit F, un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
   Montrer que F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

C. Matrice normale et noyau

Dans toute cette partie B., on considère une matrice A normale d'ordre n.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. On note pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$ $m_{i,j} = \mathrm{Coeff}_{i,j}(M)$.
   Soit $X = (x_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, une matrice colonne.
   On note $Y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, la matrice colonne égale à $M \times X$.
   Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, exprimer y_i en fonction des $(m_{i,j})$ et (x_j).
   Puis exprimer ${}^t\overline{X} \times M^\star M \times X$ en fonction des (y_i).
2. Montrer, par double inclusion, que pour toute matrice M, on a $\mathrm{Ker}\ M = \mathrm{Ker}\ (M^\star M)$.
   Pour l'inclusion la plus difficile, on pourra utiliser la réponse à la question précédente

Pour la suite de cette partie, A désigne une matrice normale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. En déduire que pour toute matrice normale A, on a : $\mathrm{Ker}\ A = \mathrm{Ker}\ A^\star$.
4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, exprimer $(A - \lambda I_n)^\star$ en fonction de $A^\star$ et $\overline{\lambda}$.
5. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, une matrice colonne. Montrer qu'on a l'équivalence :

$$A \times Y = \lambda Y \Longleftrightarrow A^\star \times Y = \overline{\lambda} Y$$

6. Soient $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$ et $Y, Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, deux matrices colonnes telles que $AY = \lambda Y$ et $AZ = \mu Z$.
   Montrer que ${}^t\overline{Z} \times Y = 0$.
   On pourra commencer par montrer que $\lambda {}^t\overline{Z} \times Y = \mu {}^t\overline{Z} \times Y$.
7. Montrer alors que $(\text{Im } A)^{\perp} = \text{Ker } A^{\star} = \text{Ker } A$.
8. En déduire que $\text{Ker } A^2 = \text{Ker } A$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Ker } (A - \lambda I_n)^2 = \text{Ker } (A - \lambda I_n)$.

Ce dernier résultat pourrait nous permettre de montrer « aisément » que toute matrice normale est diagonalisable ; ce que nous admettons dans un contexte encore plus précis en début de partie suivante.

D. Matrices normales et trace

On admet ici que si une matrice H vérifie $H^{\star} = H$ (on dit que H **est hermitienne**),
alors il existe P inversible et D une matrice diagonale à coefficients **réels** telle que $H = PDP^{-1}$
(on dit que H **est diagonalisable réelle**).

1. Montrer que A est une matrice normale si et seulement si $\text{tr}\big((A^{\star}A)^2\big) = \text{tr}(A^{\star 2}A^2)$.
   Pour démontrer la condition suffisante, on pourra considérer $H = AA^{\star} - A^{\star}A$, *montrer qu'il existe* P, *inversible et* D *diagonale à coefficients réels telles que* $H = PDP^{-1}$ *; puis montrer que* $\text{tr}(H^2) = 0$ *et en déduire que* $H = 0$
2. En déduire que A est normale si et seulement si A commute avec $AA^{\star}$.
3. Montrer que la matrice triangulaire en blocs $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$ est normale si et seulement si les blocs diagonaux A, D et F sont normaux et $B = C = E = 0$.
   Pour démontrer la condition nécessaire, on pourra comparer les traces des blocs de matrices sur la diagonales de $M^{\star}M$ *et de* $MM^{\star}$.
4. On suppose que les matrices M et N vérifient $MM^{\star} = NN^{\star}$ et $M^{\star}M = N^{\star}N$.
   Montrer que M et N ont les mêmes noyaux et les mêmes images.
   On pourra exploiter des réponses de la partie précédente.
5. Montrer que les conditions (H_1) et (H_2) suivantes sont équivalentes :
   — (H_1) $\quad MM^{\star} = NN^{\star}$ et $M^{\star}M = N^{\star}N$
   — (H_2) $\quad M^{\star}MM^{\star} = M^{\star}NN^{\star}$ et $NM^{\star}M = NN^{\star}N$
   On commencera par montrer que (H_1) *exprime que* $K = \begin{pmatrix} 0 & M^{\star} \\ N & 0 \end{pmatrix}$ *est normale.*
   Et (H_2) *exprime que* K *commute avec* $KK^{\star}$