EXERCICE 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est dite pseudo-inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$(H1) \quad AB = BA$$
$$(H2) \quad ABA = A$$
$$(H3) \quad BAB = B$$

On dit alors que B est une pseudo-inverse de A.

1- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice pseudo-inversible, et B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A.

a) En calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $AB_1 = AB_2$.

b) En déduire que $B_1 = B_2$.

Ainsi, une matrice pseudo-inversible A admet une unique pseudo-inverse, que l'on note A^*.

2- Exemples

a) Montrer que la matrice nulle 0_n est pseudo-inversible, et préciser sa pseudo-inverse.

b) Montrer que toute matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$ est peudo-inversible, et préciser sa pseudo-inverse.

c) Montrer que toute matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ est peudo-inversible, et préciser sa pseudo-inverse.

3- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice pseudo-inversible.

a) La matrice A^* est-elle pseudo-inversible? Si oui, préciser sa pseudo-inverse.

b) La matrice ${}^tA$ est-elle pseudo-inversible? Si oui, préciser sa pseudo-inverse.

c) Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $A' = P^{-1}AP$ est pseudo-inversible, et préciser sa pseudo-inverse en fonction de P et A^*.

d) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $A^*A^k = A^{k-1}$.

4- Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $N^p = 0_n$.

a) Montrer qu'il existe un unique entier naturel non nul p_0 tel que $N^{p_0} = 0_n$ et $N^{p_0-1} \neq 0_n$.

b) Montrer que si N est pseudo-inversible alors $N = 0_n$.

c) Que peut-on en déduire concernant la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$?

5- On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) En observant les colonnes des matrices A, $A - 2I_3$ et $A - 4I_3$, expliciter, pour $\lambda \in \{0, 2, 4\}$, une solution non nulle du système linéaire (S_λ) $(A - \lambda I_3)X = 0_{3,1}$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{0, 2, 4\}$.

c) Montrer que la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible. Expliciter son inverse, en expliquant la démarche.

Puis calculer $P^{-1}AP$.

d) Montrer que A est pseudo-inversible, et préciser sa pseudo-inverse.