Devoir à la maison n°1

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice

On considère le polynôme $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ de racines x_1, x_2, x_3.
On note $S = \dfrac{x_1x_2}{x_3} + \dfrac{x_3x_1}{x_2} + \dfrac{x_2x_3}{x_1}$

1. Développer $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ et identifier des relations entre A, B, C et des opérations homogènes et symétriques de x_1, x_2, x_3.
2. En déduire une expression de S en fonction de A, B et C.
3. Sans calculer les racines a_1, a_2, a_3 de x^3-3x^2-x+1, donner la valeur de $S = \dfrac{a_1a_2}{a_3}+\dfrac{a_3a_1}{a_2}+\dfrac{a_2a_3}{a_1}$.

Problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère deux suites finies de réels **positifs** : $a_1, a_2, \dots, a_n$ et b_1, b_2, b_n.
On suppose que ces suites sont ordonnées : $a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_{n-1} < a_n$ et $b_1 < b_2 < b_3 \cdots < b_{n-1} < b_n$.
On considère une permutation de (b_i), que l'on note (c_i).
Autrement écrit ; à tout i de $[\![1, n]\!]$, correspond un unique j de $[\![1, n]\!]$ tel que $b_i = c_j$
Avec les (c_i), nous avons *perdu* l'ordre de (b_i).
Par la suite, on considère : $S_c = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_ic_i = a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n$

1. Combien existe-t-il de telle suite (c_i) possible ?
2. Exemple d'application avec $n = 3$.
   Trois boites contiennent des billets de 10, 20, et 50 euros.
   On prend 3 billets d'une boite, 4 d'une autre et 5 de la dernière.
   Quelles sont les sommes d'argent que l'on peut récupérer de cette façon ? Préciser les valeurs de (a_i), (b_i) est des suites (c_i) pour chacun de ces exemples
3. Démontrer le résultat suivant :
   pout toute permutation (c_i) de (b_i), on a
   $$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_ib_{n-i+1}}_{=S_{-b}} < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_ic_i}_{=S_c} < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i}_{=S_b}$$
4. Application 1. En considérant $M = \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$, puis $A_i = \frac{x_1x_2\cdots x_i}{m^i}$, $(a_i) = (A_k)$ ordonnée par ordre croissant et enfin (b_i) tel que $b_i = \frac{1}{a_i}$, montrer l'inégalité arithmético-géométrique :
   $$\text{pour tout } x{\in}\mathbb{R}_+^* \qquad \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
5. Application 2. Démontrer l'inégalité de Tchebychev :
   $$\frac{a_1b_1 + \cdots a_nb_n}{n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \times \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$
6. Application 3. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$(a_1b_1 + \cdots a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$