Devoir à la maison n°2
CORRECTION

Exercice

On considère $n = 2m + 1$, un entier impair.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   Il suffit de faire le calcul (en faisant attention au module et partie réelle) :
   $$(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) = z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + e^{i\theta}e^{-i\theta} = z^2 - 2\mathfrak{Re}(e^{i\theta})z + |z|$$
   Donc
   $$\boxed{(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) = z^2 - 2z\cos\theta + 1}$$

2. Les solutions de $z^n - 1 = 0$ sont les racines n^{e}de l'unité. Or les racines $n = 2m + 1^{\text{e}}$de l'unité s'écrivent : $e^{i\theta_k}$, avec $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{n}$.
   Pour décrire n racines distinctes, on peut prendre n termes consécutifs, soit par exemple entre 0 et $n - 1$, soit entre 1 et n, soit, mieux pour nous entre $-m$ et $+m$.
   Ainsi les n racines n^{e}de l'unité sont $z = 1$ et $z = e^{i\theta_k}$, $z = e^{-i\theta_k}$ pour $k \in \{1, 2, \dots m\} = [\![1, m]\!]$
   Donc, il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que :
   $$z^n - 1 = A(z - 1) \times \prod_{k=1}^{m}(z - e^{i\theta_k})(z - e^{-i\theta_k})$$
   Or le développement est normalisé, donc $A = 1$ et en appliquant le résultat de la question précédente :
   $$\boxed{z^n - 1 = (z - 1) \prod_{k=1}^{m=(n-1)/2} \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)}$$

3. Posons $z = \frac{a}{b}$:
   $$a^n - b^n = b^n \times \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right) = b^n(\frac{a}{b} - 1)\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)$$
   $$a^n - b^n = b(\frac{a}{b} - 1) \times \prod_{k=1}^{m} b^2\left(\frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)$$
   Et donc
   $$\boxed{a^n - b^n = (a - b)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(a^2 - 2ab\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + b^2\right)}$$

Problème

Au XVII^{e} et XVIII^{e} siècle, le problème dit « de Bâle » hantait les mathématiciens européens. Il s'agit de trouver une expression fermée de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Il était connu que cette somme convergeait, mais on ne savait pas la valeur de cette limite. C'est Euler qui donna la réponse en 1748. Nous allons essayer de suivre sa démarche.

A. Convergence

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)}$.
   Or $k-1 \leqslant k$, donc
   $$\boxed{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2}}$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. Donc la suite (S_n) est croissante.
   De plus, par telescopage,
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \qquad S_n \leqslant \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} \leqslant 2$$
   Finalement la suite (S_n) est croissante et majorée (par 2, au moins), donc
   $$\boxed{(S_n) \text{ est une suite convergente et sa limite } S = \lim(S_n) \text{ est inférieure à } 2}$$

Donc le but du « problème de Bâle » est d'obtenir la valeur de S.

B. En exploitant la fonction cotan

On rappelle que la fonction cotan (lue cotangente) est l'application :

$$\text{cotan} : \quad]k\pi, (k+1)\pi[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

Pour la suite du problème nous aurons besoin de la fonction :

$$f_m : \quad]-\pi, \pi[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \theta \frac{\sin((2m+1)\theta)}{\sin^{2m+1}\theta}$$

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$,
   $$\sin((2m+1)\theta) = \mathfrak{Im}\left(e^{(2m+1)\theta}\right) = \mathfrak{Im}\left((e^{\theta})^{2m+1}\right) = \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} (i \sin\theta)^k \cos^{2m+1-k}\theta\right)$$
   Pour ne retenir que la partie imaginaire, il faut que k soit impaire,
   donc de la forme $k = 2h+1$ (pour h de 0 à m) et dans ce cas $i^k = i^{2h+1} = (i^2)^h \times i = (-1)^h i$
   $$\sin((2m+1)\theta) = \sum_{h=0}^{m} \binom{2m+1}{2h+1} (-1)^h \sin^{2h+1}\theta \cos^{2m+1-(2h+1)}\theta$$
   $$\boxed{\sin((2m+1)\theta) = \sum_{h=0}^{m} \binom{2m+1}{2h+1} (-1)^h \sin^{2h+1}\theta \cos^{2(m-h)}\theta}$$
2. On a donc, en divisant par $\sin^{2m+1}\theta$:
   $$f_m(\theta) = \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin^{2m+1}\theta} = \sum_{h=0}^{m} \binom{2m+1}{2h+1} (-1)^h \frac{\cos^{2(m-h)}\theta}{\sin^{2(m-h)}\theta}$$
   Ainsi,
   $$\boxed{\text{avec } P_m(x) = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{2m+1}{2h+1} x^{m-h}, \text{ on a } f_m(\theta) = P_m(\text{cotan}^2\theta)}$$

3. P_m est un polynôme de degré m, il admet au plus m racines.
   On a $P_m(x) = 0 \iff \big(x = \text{cotan}^2\theta \text{ et } f_m(\theta) = 0\big)$.
   Or $f_m(\theta) = 0 \iff \sin((2m+1)\theta) = 0 \iff \theta \equiv 0 \left[\dfrac{\pi}{2m+1}\right]$
   Donc, il faut prendre m termes consécutifs de la forme $\dfrac{k\pi}{2m+1}$, anticipant la suite :

$$\boxed{\text{les } m \text{ racines de } P_m \text{ sont les } m \text{ nombres (positifs) } x_k = \text{cotan}^2\frac{k\pi}{2m+1}, \text{ pour } k \in \{1, \dots, m\}}$$

4. P_m est un polynôme de degré m qui s'écrit :

$$P_m(X) = \binom{2m+1}{1}x^m - \binom{2m+1}{3}x^{m-1} + \dots$$

   Donc, comme $\dfrac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \dfrac{(2m+1)(2m)(2m-1)1!}{3!(2m+1)} = \dfrac{2m(2m-1)}{6}$ on a

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} x_k = \sum_{k=1}^{m} \text{cotan}^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m(2m+1)}{6}}$$

5. (a) Les fonctions φ_1 et φ_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   Et pour tout $x \in I$,

$$\varphi_1'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \leqslant 0 \qquad \varphi_2'(x) = \cos(x) - 1 \geqslant 0$$

   Donc φ_1 est croissante sur I et φ_2 est décroissante sur I.
   Enfin, comme $\varphi_1(0) = \tan 0 - 0 = 0$ et $\varphi_2(0) = \sin 0 - 0$, on a donc

$$\forall\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \varphi_1(x) = \tan x - x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(x) = \sin x - x \leqslant 0$$

$$\boxed{\forall\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \tan x \geqslant x \qquad \text{et} \qquad \sin x \leqslant x}$$

   (b) Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\boxed{1 + \text{cotan}^2(x) = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}}$$

   (c) On va procéder en deux temps. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan^2 x \geqslant x^2 \Longrightarrow \text{cotan}^2(x) = \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

   Et par ailleurs, par décroissance de $t \mapsto t^2$

$$1 + \text{cotan}^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \geqslant \frac{1}{x^2}$$

   On en déduit que

$$\boxed{\forall\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \text{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \text{cotan}^2(x) + 1}$$

6. Sommant les inégalités suivantes pour $x = \theta_k = \dfrac{k\pi}{2m+1}$
   avec $k \in \{1, \dots m\}$, donc on a bien $\theta_k \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\sum_{k=1}^{m} \text{cotan}^2\theta_k \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\theta_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left(1 + \text{cotan}^2\theta_k\right) = m + \sum_{k=1}^{m} \text{cotan}^2\theta_k$$

   En exploitant le résultat de la question 4. :

$$\frac{2m(2m-1)}{6} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{(2m+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant m + \frac{2m(2m-1)}{6}$$

   Ainsi, en multipliant tout par $\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}$:

$$\frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2}\frac{\pi^2}{6} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{m}{(2m+1)^2}\pi^2 + \frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2}\frac{\pi^2}{6}$$

7. Enfin, il nous reste à exploiter le théorème de convergence par encadrement (parfois appelé théorème des gendarmes ou des sandwichs) :

$$\frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2} = \frac{4m^2-2m}{4m^2+4m+1} = \frac{4m^2(1-\frac{1}{2m})}{4m^2(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{4m2})} = \frac{1-\frac{1}{2m}}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{4m2}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Et de même :

$$\frac{m}{(2m+1)^2} = \frac{m}{4m^2(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{4m2})} = \frac{1}{4m}\frac{1}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{4m2}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc, par produit et addition, les deux suites de gauche et de droite convergent vers $\frac{\pi^2}{6}$.
Ainsi

$$\boxed{S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$