Devoir surveillé n°7
CORRECTION

Problème : Exponentielle de matrices

I. Questions préliminaires.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On note $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Notons $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, alors $\ln(u_n) = n \ln(1 + \frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
   Donc par composition avec la fonction exponentielle continue : /1

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge et sa limite est } \exp(x)}$$

   Concernant le calcul de vitesse de convergence, pour $n \to +\infty$:

$$u_n - e^x = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})} - e^x = e^{n(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} - e^x = e^{x - \frac{x^2}{2n} + o(\frac{1}{n})} - e^x$$
$$= e^x \left(e^{-\frac{x^2}{2n} + o(\frac{1}{n})} - 1\right) = e^x \left(1 - \frac{x^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\right) = e^x - \frac{x^2 e^x}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

/2,5

$$\boxed{\text{Donc } u_n - e^x \sim -\frac{x^2 e^x}{2n}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{a}{n} + i\frac{b}{n}$.
   On sait que $n > -a$, donc $1 + \frac{a}{n} > 0$ (partie réelle positive). Donc

$$\boxed{\left|1 + \frac{z}{n}\right| = \sqrt{(1 + \frac{a}{n})^2 + \frac{b^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 + a^2 + b^2 + 2an} \text{ et } \arg(1 + \frac{z}{n}) = \arctan \frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}} = \arctan \frac{b}{n+a}}$$

   On sait que pour tout nombre complexe Z : $|Z^n| = |Z|^n$ et $\arg(Z^n) = n \times$ Z, on a donc /2

$$\boxed{\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1 + \frac{1}{n}2a + \frac{1}{n^2}(a^2 + b^2)\right)^{n/2} \text{ et } \arg\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right) = n \times \arctan \frac{b}{n+a}}$$

3. $\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}2a + \frac{1}{n^2}(a^2 + b^2)\right)^{n/2}\right] = \frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}2a + \frac{1}{n^2}(a^2 + b^2)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2} \times \frac{2a}{n}$
   car $\frac{1}{n^2}(a^2 + b^2) = o(\frac{2a}{n})$.
   donc $\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}2a + \frac{1}{n^2}(a^2 + b^2)\right)^{n/2}\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ soit $\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^a$.
   Et de même $\arg\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right) = n \arctan \frac{b}{n+a} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{b}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

   On a donc par produit et continuité de l'exponentielle complexe (i.e. de cosinus et sinus) : /2,5

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \times \exp\left(i\arg(1 + \frac{z}{n})^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^a \times e^{ib}$$

   Par conséquent

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^{a+ib} = e^z}$$

II. Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3.

1. **Matrices antisymétriques d'ordre 2.**

   (a) Notons $B_n = \frac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_n} & -\frac{\alpha}{n\beta_n} \\ \frac{\alpha}{n\beta_n} & \frac{1}{\beta_n} \end{pmatrix}$.
   Pour que $\frac{1}{\beta_n} = \cos\theta_n$ et $-\frac{\alpha}{n\beta_n} = \sin\theta_n$, il *faut* que

$$\frac{1}{\beta_n^2} + \frac{\alpha^2}{n^2\beta_n^2} = \cos^2\theta_n + \sin^2\theta_n = 1$$

donc que

$$n^2+\alpha^2 = n^2\beta_n^2 \Longrightarrow \beta_n = \pm\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}$$

En outre, on souhaite que $\theta_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $0 \leqslant \cos\theta_n = \frac{1}{\beta_n}$.

Finalement, il *faut* $\beta_n = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}$.

Réciproquement, si $\beta_n = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}$,

alors $1 = \frac{1}{\beta_n^2} + \frac{\alpha^2}{n^2\beta_n^2}$ et d'après le théorème de relèvement,

il existe $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos\theta_n = \frac{1}{\beta_n}$ et $\sin\theta_n = \frac{\alpha}{n\beta_n}$.

et comme $\cos\theta_n = \frac{1}{\beta_n} > 0$, alors $\theta_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\theta_n = \arcsin(\frac{\alpha}{n\beta_n})$.

/2

$$\boxed{\text{avec } \beta_n = \sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}, \text{ puis } \theta_n = \arcsin\frac{\alpha}{n\beta_n}, \text{ on a } B_n = \frac{1}{\beta_n}\left(I_2+\frac{1}{n}A\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}}$$

(b) Par identification : $\cos\theta_n = \dfrac{1}{\beta_n}$ et $\sin\theta_n = \dfrac{\alpha}{n\beta_n}$. Donc $\tan\theta_n = \dfrac{\alpha}{n}$

Par conséquent, $\theta_n = \arctan\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)$.

On a donc $(I_2+\frac{1}{n}A)^n = (\beta_n B_n)^n = \beta_n^n B_n^n$.

Puis montrons par récurrence pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}_m : \ll B_n^m = \begin{pmatrix} \cos m\theta_n & -\sin m\theta_n \\ \sin m\theta_n & \cos m\theta_n \end{pmatrix} \gg$$

— $B_n^0 = I_2$ et $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_m$ est vraie.

$$B_n^{m+1} = B_n \times B_n^m = \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos m\theta_n & -\sin m\theta_n \\ \sin m\theta_n & \cos m\theta_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_n\cos m\theta_n - \sin\theta_n\sin m\theta_n & -\cos\theta_n\sin m\theta_n - \sin\theta_n\sin m\theta_n \\ \sin\theta_n\cos m\theta_n + \cos\theta_n\sin m\theta_n & -\sin\theta_n\sin m\theta_n + \cos\theta_n\cos m\theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(m+1)\theta_n & -\sin(m+1)\theta_n \\ \sin(m+1)\theta_n & \cos(m+1)\theta_n \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{P}_{m+1}$ est vérifiée.

Ainsi $(B_n)^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta_n & -\sin n\theta_n \\ \sin n\theta_n & \cos n\theta_n \end{pmatrix}$. /2

Or $n\theta_n = n\arctan(\frac{\alpha}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\dfrac{\alpha}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

Et $\beta_n = \sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2} = 1+\frac{\alpha^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$, donc $\ln(\beta_n^n) = \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right) \sim \frac{\alpha^2}{4n} \to 0$.

Donc, par continuité de l'exponentielle en 0 : $\beta_n^n \to e^0 = 1$.

Donc coefficients par coefficients (par continuité de cos et sin) :

/1

$$\boxed{\left(I_2+\frac{1}{n}A\right)^n \text{ converge et sa limite est } E(A) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \text{ matrice de rotation d'angle } \alpha}$$

2. **Matrices antisymétriques d'ordre 3.**

(a) Le calcul donne

$$B^T \times B = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & & \\ & a^2+c^2 & \\ & & b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc } \frac{1}{2}\mathrm{tr}(B^TB) = a^2+b^2+c^2 > 0 \text{ car } B \neq 0}$$ /1

(b) i. Les calculs sont directs et donnent

/0,5

$$\boxed{BX = 0 \quad BY = Z \quad BZ = -\beta^2 Y}$$

ii. Toujours directement :

/1

$$\boxed{\begin{array}{c} X^TX = \beta^2 \quad Y^TY = b^2+c^2 \quad X^TY = 0 \quad X^TZ = 0 \quad Y^TZ = 0 \\ Z^TZ = a^2c^2+a^2b^2+b^4+c^4+2b^2c^2 = (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2) = \beta^2(b^2+c^2) \end{array}}$$

iii. Le calcul matriciel par blocs donne :

$$B\times P = (Bx|By|Bz) = \left(\frac{1}{\beta}BX|\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}BY|\frac{1}{\beta\sqrt{b^2+c^2}}BZ\right) = \left(0|\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}Z|\frac{-\beta}{\sqrt{b^2+c^2}}Y\right)$$

$$\boxed{B\times = (0|\beta z| -\beta y)}$$ /1,5

iv. $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $P^T \times P = I_3$.
Faisons le calcul :

$$P^T \times P = \begin{pmatrix} x^T \\ y^T \\ z^T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^Tx & x^Ty & x^Tz \\ y^Tx & y^Ty & y^Tz \\ z^Tx & z^Ty & z^Tz \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2}X^TX & \frac{1}{\beta\sqrt{b^2+c^2}}X^TY & \frac{1}{\beta^2\sqrt{b^2+c^2}}X^TZ \\ \frac{1}{\beta\sqrt{b^2+c^2}}Y^TX & \frac{1}{b^2+c^2}Y^TY & \frac{1}{\beta(b^2+c^2)}Y^TZ \\ \frac{1}{\beta^2\sqrt{b^2+c^2}}Z^TX & \frac{1}{\beta(b^2+c^2)}Z^TY & \frac{1}{\beta^2(b^2+c^2)}Z^TZ \end{pmatrix} = I_3$$

d'après les calculs précédents et car : $Z^TX = (X^TZ)^T = 0$, $Y^TX = (X^TY)^T = 0$ et $Z^TY = (Y^TZ)^T = 0$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})}$$ /1,5

(c) D'après les questions précédentes, dans le cas $\underline{b^2+c^2 \neq 0}$:

$$B \times P = \begin{pmatrix} 0 & \beta z & -\beta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x+0y+0z & 0x+0y+\beta z & 0x-\beta y+0z \end{pmatrix}$$

$$B \times P = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} = P \times R \text{ avec } R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, comme P est inversible, en multipliant à droite par P^{-1} : $B = P \times R \times P^{-1}$, cela donne bien l'égalité attendue. /1,5

Dans le cas $\underline{b^2+c^2 = 0}$, alors on a directement :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et donc avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ car $P^T = P$ et $P^2 = P^TP = I_3$,
et $\beta = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{a^2} = a$.

Dans cette situation, on trouve également le résultat attendu. /1,5

$$\boxed{\text{il existe } P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \text{ et } \beta = \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(B^TB)} \text{ tel que } B = P \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \times P^{-1}}$$

(d) Commençons par démontrer par récurrence : $(PMP^{-1})^n = PM^nP^{-1}$.

— Le résultat est vrai pour $n = 0$.
— Et $(PMP^{-1})^{n+1} = (PMP^{-1})^n \times (PMP^{-1}) = PM^nP^{-1}PMP^{-1}$ si le résultat est vrai au rang n.
et donc $(PMP^{-1})^{n+1} = PM^nMP^{-1} = PM^{n+1}P^{-1}$. Ainsi la relation est héréditaire. /1

La calcul matriciel par blocs donne (en reprenant R définie plus haut) :

$$\left((I_3+\frac{1}{n}B\right)^n = (P\times I_3\times P^{-1}+P\frac{1}{n}RP^{-1})^n = \left(P\left(I_3+\frac{1}{n}C\right)P^{-1}\right)^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_2+\frac{1}{n}A' \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

Avec $A' = A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, comme en première partie.

$$\left(I_3+\frac{1}{n}B\right)^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2+\frac{1}{n}A')^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

Or nous savons que $(I_2+\frac{1}{n}A')^n$ converge vers $E(A')$.
Il y a donc une convergence coefficients par coefficients :

/2,5

$$\boxed{\left(I_3+\frac{1}{n}B\right)^n \text{ converge et } E(B) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}P^{-1}}$$

III. Exponentielle de matrices diagonalisables.

1. **Cas de matrices diagonales.**

Pour commencer, on rappelle un résultat vu en cours (qui se démontre par récurrence) :
Si $D = diag(a_1, \dots a_p)$ *est diagonale,*
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* D^n *est également diagonale et* $D^n = diag(a_1^n, \dots a_p^n)$*.*
Soit $D \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

(a) Comme $I_p + \frac{1}{n}D$ est diagonale, le calcul de puissance est simple :

$$(I_p + \tfrac{1}{n}D)^n = \begin{pmatrix} (1+\frac{1}{n}\lambda_1)^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (1+\frac{1}{n}\lambda_p)^n \end{pmatrix}.$$

On reconnait des suites numériques qui convergent vers e_i^λ chacune.
Donc (convergence coefficients par coefficients) :

/2

$$\boxed{E(D) \text{ existe bien et } E(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_p} \end{pmatrix} \in GL_p(\mathbb{K})}$$

car $E(D)$ est diagonale avec que des coefficients non nuls sur la diagonale.

(b) Il faut faire attention au cas où les valeurs λ_i se répète, dans ce cas il ne faut en considérer qu'une seule.
Pour simplifier les choses, on va noter

$$\{\mu_1, \dots \mu_r\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p\}$$

où $\mu_i \neq \mu_j$ dès que $i \neq j$ et pour tout $h \in \mathbb{N}_p$, $\exists\ k \in \mathbb{N}_k$ tel que $\lambda_h = \mu_k$.
Enfin, notons que r est le nombre de λ_i distincts ($r \leqslant p$, nécessairement).
Puis, il s'agit tout simplement de la théorie de l'interpolation de Lagrange.
On a alors (question de cours) :

/2

$$\boxed{Q = \sum_{k=1}^{r} \left(e^{\mu_k} \prod_{i \neq k} \frac{X - \mu_i}{\mu_k - \mu_i} \right)}$$

Chaque terme $\displaystyle\prod_{i \neq k} \frac{X - \mu_i}{\mu_k - \mu_i}$ est de degré $r-1$, donc

$$\boxed{\deg Q \leqslant r - 1 = \text{nombre de } \lambda_i \text{distincts } - 1}$$

Enfin,

/2,5

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ est un sous-espace affine : } \mathcal{L} = Q + R\mathbb{K}[X], \text{ avec } R = \prod_{i=1}^{r} (X - \mu_i)}$$

(c) Notons que si $T = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Di = \text{diag}(b_1, \dots b_p)$ est diagonale,
alors, d'après la remarque préliminaire :

$$T(Di) = \sum_{k=0}^{d} a_k Di^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \text{diag}(b_1^k, b_2^k, \dots b_p^k) = \text{diag}\left(\sum_{k=0}^{d} a_k b_1^k, \sum_{k=0}^{d} a_k b_2^k, \dots \sum_{k=0}^{d} a_k b_p^k \right)$$

$$T(D_i) = \text{diag}\left(T(b_1), T(b_2), \dots T(b_p)\right)$$

Donc dans le cas qui nous intéresse :

$$Q(D) = \text{diag}\left(Q(\lambda_1), Q(\lambda_2), \dots Q(\lambda_p)\right) = \text{diag}\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots e^{\lambda_p}\right) = E(D)$$

$$\boxed{\text{Ainsi } E(D) = Q(D) \qquad (= T(D) \text{ pour tout } T \in \mathcal{L})}$$ /1,5

(d) Même type de raisonnement :

On peut supposer que $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$ et $D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_p \end{pmatrix}$.

Comme $I_p + \frac{1}{n}(D_1 + D_2)$ est diagonale, le calcul de puissance est simple :

$\left(I_p + \frac{1}{n}(D_1 + D_2)\right)^n = \begin{pmatrix} (1+\frac{1}{n}(\lambda_1+\mu_1))^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (1+\frac{1}{n}(\lambda_p+\mu_p))^n \end{pmatrix}$.

On reconnait des suites numériques qui convergent vers $e^{\lambda_i+\mu_i}$ chacune.

Donc (convergence coefficients par coefficients) :

$$E(D_1+D_2) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1+\mu_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_p+\mu_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{\mu_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\mu_p} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E(D_1 + D_2) = E(D_1) \times E(D_2)}$$

/1,5

(e) En appliquant la formule trouvée en (a) on a

/0,5

$$\boxed{E(xI_p) = e^x I_p \text{ et } E(0_p) = I_p \text{ (avec } x = 0)}$$

Et donc $I_n = E(0) = E(D - D) = E(D + (-D)) = E(D) \times E(-D)$, donc

/1

$$\boxed{E(D)^{-1} = E(-D)}$$

2. **Existence et propriétés de $E(A)$ lorsque A est diagonalisable.**
Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

(a) On a déjà vu plus haut : $A^k = P \times D^k \times P^{-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Puis par combinaison linéaire, si $T = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$,

$$T(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = \sum_{k=0}^{d} a_k P \times D^k \times P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{d} a_k D^k\right) P^{-1}$$

$$\boxed{T(A) = P \times T(D) \times P^{-1}}$$

/1

(b) Puis, pour tout entier n, en exploitant la question précédente avec $T = (1 + \frac{1}{n}X)^n$:

$$\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = T(A) = P \times T(D) \times P^{-1} = P \times \left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n \times P^{-1}$$

Pour étudier la convergence, on regarde le résultat <u>coefficient par coefficient</u> :

$$\forall\, i,j \in \mathbb{N}_p, \qquad \left[\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n\right]_{i,j} = \left[P \times \left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n \times P^{-1}\right]_{i,j}$$

$$= \sum_{k,h=1}^{p} [P]_{i,h} \left[(I_p + \frac{1}{n}D)^n\right]_{h,k} [P^{-1}]_{k,j}$$

Or $\left[(I_p + \frac{1}{n}D)^n\right]_{h,k} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq h \\ e^{\lambda_k} & \text{si } k = h \end{cases}$. Les autres coefficients sont constants.

$$\forall\, i,j \in \mathbb{N}_p, \qquad \left[\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n\right]_{i,j} \longrightarrow \sum_{k=1}^{p} [P]_{i,k} e^{\lambda_k} [P^{-1}]_{k,j} = \left[P \times E(D) \times P^{-1}\right]_{i,j}$$

$$\boxed{E(A) \text{ existe et } E(A) = P \times E(D) \times P^{-1} = P \times Q(D) \times P^{-1}}$$

/2,5

(c) Soit $x \in \mathbb{K}$. On a, avec les mêmes notations : $xI_p + A = P \times (xI_p + D) \times P^{-1}$.
On peut donc appliquer les résultats précédents :

$$\begin{aligned} E(xI_p + A) &= P \times E(xI_p + D) \times P^{-1} = P \times E(xI_p)E(D) \times P^{-1} \\ &= P \times (e^x I_p)E(D) \times P^{-1} = e^x PE(D)P^{-1} = e^x E(A) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(xI_p + A) = e^x E(A)}$$ /1,5

3. **Critère de diagonalisation**

(a) On suppose que A est diagonalisable.
Donc on peut considérer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et D diagonale telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.
On peut imaginer que $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_p)$.
Comme précédemment (III.1.(b)), on note $\{\mu_j, j \in \mathbb{N}_r\}$, l'ensemble $\{\lambda_i\}$, sans répétition.
Pour tout polynôme T : $T(A) = P \times T(D) \times P^{-1}$.
Considérons donc $T = \displaystyle\prod_{j=1}^{r}(X - \mu_j)$. T est scindé à racines simples.
Comme D est diagonale : $T(D) = \mathrm{diag}(T(\lambda_1), T(\lambda_2) \dots T(\lambda_p)) = \mathrm{diag}(0, 0, \dots 0) = 0_p$.
Et ainsi $T(A) = 0$.

/1

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule } A.}$$

(b) On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{K}[X]$, scindé, à racines simples tel que $T(A) = 0$.
Notons que, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $E_i = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \mu_i X\} = \mathrm{Ker}\ (A - \mu_i I_p)$.

i. Soit $(X - a)$ un facteur premiers de chaque T_i.
Alors comme $(X - a)|T_1$, nécessairement $a \in \{\mu_2, \dots \mu_r\}$.
Or $(X - a)|T_k$, donc $a \neq \mu_k$. Finalement un tel facteur n'existe pas.

/2

$$\boxed{\begin{array}{c} T_1, \dots T_r \text{ sont premiers entre eux dans leur ensemble.} \\ \text{D'après le théorème de Bézout, il existe } U_1, \dots U_r \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } \displaystyle\sum_{i=1}^{r} U_i T_i = 1. \end{array}}$$

ii. Si on applique cette relation polynomiale en A : $\sum_{i=1}^{r} U_i(A) \times T_i(A) = I_p$.
Puis en multipliant par la colonne X à droite :

/1

$$\boxed{\text{pour tout } X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ X = \sum_{i=1}^{r} [U_i(A)T_i(A)]X}$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Notons alors $X_i = [U_i(A)T_i(A)]X$.
$(A - \mu_i I_p)X_i = [U_i \times (X - \mu_i) \displaystyle\prod_{j \neq i}(X - \mu_j)](A)X = U_i(A)T(A)X = U_i(A) \times 0 \times X = 0.$
donc $X_i \in \mathrm{Ker}\ (A - \mu_i I_p) = E_i$.
Ainsi, tout élément X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est une somme d'éléments de E_i.
Chaque E_i étant dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a donc

/2

$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{r} E_i}$$

En fait, on a mieux : la somme est directe !

iii. La famille $\mathcal{B}_i$ est en fait génératrice de E_i.
Et la somme des E_i donne $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, donc la famille $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots \mathcal{B}_r)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Ainsi Im $P = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

/1

$$\boxed{\text{Et donc } P \text{ est inversible.}}$$

iv. Pour tout $X_{j,i} \in E_i$, $AX_{j,i} = \mu_i X_{j,i}$ car $X_{j,i} \in E_i$.
Donc le calcul matriciel donne

$$\begin{aligned} AP &= (AX_{1,1}|\cdots|AX_{a_1,1}|AX_{1,2}|\cdots|AX_{a_2,2}|\cdots|AX_{1,r}|\cdots|AX_{a_r,r}) \\ &= (\mu_1 X_{1,1}|\cdots|\mu_1 X_{a_1,1}|\mu_2 X_{1,2}|\cdots|\mu_2 X_{a_2,2}|\cdots|\mu_r X_{1,r}|\cdots|\mu_r X_{a_r,r}) \\ &= (X_{1,1}|\cdots|X_{a_1,1}|X_{1,2}|\cdots|X_{a_2,2}|\cdots|X_{1,r}|\cdots|X_{a_r,r}) \times \begin{pmatrix} \mu_1 I_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 I_{r_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_r I_{r_r} \end{pmatrix} = PD \end{aligned}$$

avec D, matrice diagonale.
En multipliant par P^{-1} à gauche, on a donc

/1,5

$$\boxed{P^{-1}\times A\times P=\begin{pmatrix}\mu_1 I_{r_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2 I_{r_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots\ \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_r I_{r_r}\end{pmatrix}, \text{ matrice diagonale.}}$$

(c) On a donc trouver une condition nécessaire en (a) et vue qu'elle était suffisante en (b). /1

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si il existe } T, \text{ polynôme scindé à racines simples tel que } T(A)=0}$$

4. **Exponentielle de la somme.**
Soient $A, B \in M_p(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables. On suppose que A et B commutent.

(a) Puisque B est diagonalisable, il existe $\overline{P}\in GL_p(\mathbb{K})$ et $\overline{D}$ diagonale telles que $B=\overline{P}\times\overline{D}\times\overline{P}^{-1}$.
Et donc $C=P_1^{-1}\times\overline{P}\times\overline{D}\times\overline{P}{-1}\times P_1=(P_1^{-1}\overline{P})\times\overline{D}\times(P_1^{-1}\overline{P})^{-1}$.
et comme $P=P_1^{-1}\overline{P}$ est inversible comme produit de matrices inversibles ;

/1

$$\boxed{C \text{ est diagonalisable}}$$

De plus

$$C\times D=P_1^{-1}\times B\times P_1\times P_1^{-1}\times A\times P_1=P_1^{-1}\times BA\times P_1=P_1^{-1}\times AB\times P_1=P_1^{-1}\times A\times P_1P_1^{-1}\times B\times P_1=D\times C$$

$$\boxed{C \text{ et } D \text{ commutent}}$$ /1

(b) On peut écrire C en blocs, repartis comme ceux de la matrice D : $C=\begin{pmatrix}C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,r}\\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,r}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ C_{r,1} & \cdots & C_{r,r-1} & C_{r,r}\end{pmatrix}$
(les blocs diagonaux $C_{i,i}$ sont carrés d'ordre n_i, par exemple. Les autres blocs ne sont pas nécessairement carrés)
Alors puisque $C\times D=D\times C$, on obtient (calcul par blocs)

$$\forall\ i,j\in\mathbb{N}_r \qquad d_iC_{i,j}=d_jC_{i,j}$$

Et donc nécessairement $C_{i,j}=0$ dès que $i\neq j$, car $d_i\neq d_j$.
Et par conséquent /2

$$\boxed{C \text{ est de la forme } \begin{pmatrix}C_1 & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & C_r\end{pmatrix} \text{ où pour tout réel } i\in\mathbb{N}_r,\ C_i \text{ est carrée d'ordre } n_i.}$$

(c) B est diagonalisable, donc il existe T, polynôme scindé à racines simples tel que $T(B)=0$.
Puis, comme $C=P_1^{-1}\times B\times P_1$, $T(C)=P_1^{-1}\times T(B)\times P_1=0$, d'après III.2.(a).
Ensuite, comme précédemment on peut démontrer par récurrence et par combinaison linéaire :

$$\forall\ k\in\mathbb{N}, C^k=\begin{pmatrix}C_1^k & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & C_2^k & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & C_r^k\end{pmatrix} \qquad \forall\ Q\in\mathbb{K}[X], Q(C)=\begin{pmatrix}Q(C_1) & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & Q(C_2) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & Q(C_r)\end{pmatrix}$$

Ainsi, en particulier avec le polynôme scindé à racines simples, comme $T(C)=0$:

$$\forall\ h\in\mathbb{N}_r, \qquad T(C_h)=0$$

Donc il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule C_h,
donc C_h est diagonalisable, d'après III.3.(b).

/2,5

$$\boxed{\text{pour tout } i\in\mathbb{N}_r,\ C_i \text{ est diagonalisable}}$$

(d) Chaque C_i est diagonalisable, il existe P'_i et D'_i diagonale telles que $C_i = P'_i \times D'_i \times {P'_i}^{-1}$.

Avec $P_2 = \begin{pmatrix} P'_1 & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & P'_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P'_r \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} D'_1 & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & D'_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D'_r \end{pmatrix}$, alors $C = P_2 \times D \times P_2^{-1}$

En prenant $P = P_1 \times P_2$.

On a donc

$$\begin{aligned} P^{-1} \times B \times P &= P_2^{-1} \times P_1^{-1} B P_1 \times P_2 = P_2^{-1} \times C \times P_2 = D' \\ P^{-1} \times A \times P &= P_2^{-1} P_1^{-1} A P_1 P_2 = P_2^{-1} \times D \times P_2 \\ &= \begin{pmatrix} P'_1 & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & P'_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P'_r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 I_{n_1} & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & d_2 I_{n_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_r I_{n_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} {P'_1}^{-1} & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & {P'_2}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {P'_r}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P'_1 \times d_1 I_{n_1} \times (P'_1)^{-1} & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & P'_2 \times d_2 I_{n_1} \times (P'_2)^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P'_r \times d_r I_{n_1} \times (P'_r)^{-1} \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

$\boxed{\text{il existe } P \in GL_p(\mathbb{K}) \text{ telle que } P^{-1}AP \text{ et } P^{-1}BP \text{ soient diagonales}}$ /2,5

(e) On a alors $P^{-1}(A+B)P = P^{-1}AP + P^{-1}BP = D + D'$, diagonale, donc $A+B$ diagonalisable donc $E(A+B)$ existe (question 2.(b)).

On a alors comme en question 2. (b) : $E(A+B) = P \times E(D+D') \times P^{-1}$.

Puis, les matrices étant diagonales : $E(D+D') = E(D) \times E(D')$.

Donc $E(A+B) = P \times E(D)E(D') \times P^{-1} = PE(D)P^{-1} \times PE(D')P^{-1} = E(A)E(B)$.

/2

$\boxed{E(A+B) \text{ existe et } E(A)E(B) = E(A+B) = E(B+A) = E(B)E(A).}$

IV. Exponentielle de matrices nilpotentes.

1. (a) Soit $j \in [\![1, k]\!]$. Soit $X \in \text{Ker } A^{j-1}$.

Alors $A^j X = A \times A^{j-1} X = A \times 0 = 0$, donc $X \in \text{Ker } (A^j)$ et ainsi $\text{Ker } (A^{j-1}) \subset \text{Ker } A^j$.

Il reste à montrer que l'inclusion est stricte.

Supposons que $\text{Ker } (A^{j-1}) = \text{Ker } A^j$.

Soit $X \in \text{Ker } A^{j+1}$, alors $A^j \times AX = 0$, donc $AX \in \text{Ker } A^j = \text{Ker } A^{j-1}$

ainsi $0 = A^{j-1} \times AX = A^j X$ et finalement $X \in \text{Ker } A^j$.

On a donc démontrer que $\text{Ker } A^{j+1} \subset \text{Ker } A^j$,

et comme on a $\text{Ker } A^j \subset \text{Ker } A^{j+1}$, on a $\text{Ker } A^j = \text{Ker } A^{j+1}$.

Puis par récurrence, pour $h \geqslant 0$, $\text{Ker } A^{j+h} = \text{Ker } A^{j+h+1}$ donc $\text{Ker } A^{k-1} = \text{Ker } A^k$.

Mais ceci est impossible car $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$.

On a donc une contradiction et donc $\text{Ker } A^{j+1} \neq \text{Ker } A^j$

/2

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout entier } j \text{ tel que } 1 \leq j \leq k, \ker(A^{j-1}) \text{ est inclus strictement dans } \ker(A^j).}$

(b) La suite des dimensions $\dim(\text{Ker } A^j)$ est donc strictement croissante à valeurs entières pour j de 0 à k.

Or $\dim(\text{Ker } A^0) = \dim(\text{Ker } I_p) = 0$ et $\dim(\text{Ker } A^k) = \dim(\text{Ker } 0_p) = p$

Donc cette suite de $k+1$ éléments ne peut prendre au plus que $p+1$ valeurs distinctes, donc nécessairement $k+1 \leqslant p+1$.

$\boxed{k \leqslant p}$ /1,5

2. On fait le calcul (on applique le binôme de Newton car A et I_p commutent), pour $n \geqslant k$:

$$\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \frac{1}{n^h} A^h = \sum_{h=0}^{k-1} \binom{n}{h} \frac{1}{n^h} A^h$$

car $A^h = 0$, pour tout $h \geqslant k$.

En outre, puisqu'on a un produit fini (h termes), on peut multiplier les limites :

$$\binom{n}{h} \frac{1}{n^h} = \frac{n!}{h!(n-h)!n^h} = \frac{1}{h!} \frac{n(n-1)\cdots(n-h+1)}{n \times n \cdots n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{h!} \times 1 \cdots 1$$

Donc

/2

$$\boxed{E(A) \text{ existe bien et } E(A) = \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} A^h = Q(A), \text{ avec } Q = \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} X^h \in \mathbb{C}[X]}$$

3. Soit $B \in M_p(\mathbb{C})$. On suppose que A et B commutent et que $E(B)$ existe.
On a donc $\frac{1}{n}A$ et $I_p + \frac{1}{n}B$ qui commutent :

$$\left(I_p + \frac{1}{n}(A+B)\right)^n = \left((I_p + \frac{1}{n}B) + (\frac{1}{n}A)\right)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \frac{1}{n^h} A^h \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-h}$$

Comme A est nilpotente :

$$\left(I_p + \frac{1}{n}(A+B)\right)^n = \sum_{h=0}^{k-1} \binom{n}{h} \frac{1}{n^h} A^h \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-h}$$

Puisque $E(B)$ existe et en exploitant le fait que $\lim_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-i}$, on a donc en passant à la limite ($\binom{n}{h}\frac{1}{n^h} \to \frac{1}{h!}$)

$$\left(I_p + \frac{1}{n}(A+B)\right)^n = \sum_{h=0}^{k-1} \binom{n}{h} \frac{1}{n^h} A^h E(B) = Q(A) \times E(B)$$

$$\boxed{E(A+B) \text{ existe et } E(A+B) = E(A)E(B)}$$ /2,5

4. Soit $x \in \mathbb{C}$. Alors avec $B = xI_p$, les hypothèses de 3. sont vérifiées : $A \times B = B \times A$ et $E(B)$ existe.
On peut donc appliquer le résultat précédent :

/1

$$\boxed{E(xI_p + A) \text{ existe et } E(x_I p + A) = E(xI_p)E(A) = e^x I_p E(A) = e^x E(A)}$$

5. On a alors

$$E(A) - I_p = Q(A) - I_p = \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} A^h - I_p = I_p + A \times \left(\sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h!} A^{h-1}\right) - I_p = A \times \left(\sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h!} A^{h-1}\right)$$

Puis comme A et $\left(\sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h!} A^{h-1}\right)$ commutent, $(E(A) - I_p)^k = A^k \left(\sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h!} A^{h-1}\right)^k = 0$

/2

$$\boxed{E(A) - I_p \text{ est donc nilpotente.}}$$

V. Cas général ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P_n(X) = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \in \mathbb{C}[X]$.

1. **Polynôme minimal**
   (a) Par définition de vect, $\mathbb{K}[A]$ est un espace vectoriel.
   C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, de dimension finie p^2 ;

   /1

   $$\boxed{\text{donc } \mathbb{C}[A] \text{ est un espace vectoriel nécessairement de dimension finie.}}$$

   (b) Donc la famille $(I_p, A, A^2, \ldots A^{p^2})$, est une famille de $p^2 + 1$ éléments de $\mathbb{C}[A]$.
   C'est nécessairement une famille liée (plus d'éléments que la dimension de $\mathbb{C}[A]$).

   Et donc il existe $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{p^2+1}$, non tous nuls, tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p^2+1} \mu_i A^i = 0$.

   donc $T = \sum_{i=0}^{p^2+1} \mu_i X^i$, polynôme non nul est élément de I_A.

   /1,5

   $$\boxed{I_A = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(A) = 0\} \text{ est non réduit à } \{0\}.}$$

(c) Notons que m existe car $\{\deg(P), P \in I_A, P \neq 0\} \subset \mathbb{N}$ et est non vide.
Si $T \in \Pi \cdot \mathbb{C}[X]$, alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $T = Q\Pi$
et donc $T(A) = Q(A) \times \Pi(A) = Q(A) \times 0 = 0$. Donc $T \in I_A$.
Et donc $\Pi \cdot \mathbb{C}[X] \subset I_A$.
Réciproquement. Soit $T \in I_A$. Faisons la division euclidienne de T par Π
il existe $Q, R \in \mathbb{C}[X]$ tels que $T = Q\Pi + R$ avec $\deg(R) < \deg \Pi$.
Donc $R(A) = T(A) - Q(A) \times \Pi(A) = 0 - 0$, donc $R \in I_A$.
On a donc $R \in \Pi_A$ et $\deg R < \deg \Pi$,
nécessairement $R = 0$, sinon on a une contradiction avec la définition de Π.
Ainsi $T = Q\Pi$ et donc $\Pi | T$. Par conséquent $I_A \subset \Pi \cdot \mathbb{C}[X]$.

/2

$$\boxed{\text{Par double inclusion : } I_A = \Pi \cdot \mathbb{C}[X]}$$

(d) La famille $(I_p, A, A^2, \dots A^{m-1})$ est libre,
sinon, il existerait un polynôme de degré $m-1$ qui annulerait A.
Ce qui est faux par définition de m.
Donc $m \leqslant r$.
Soit $d \in \mathbb{N}$, par division euclidienne par Π :
il existe $Q, R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X^d = Q\Pi + R$ avec $\deg R < \deg \Pi = m$.
On peut supposer que $R = \sum_{i=0}^{m-1} a_i X^i$

Ainsi $A^d = Q(A)\Pi(A) + R(A) = R(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} a_i A^i$.

Par conséquent, pour tout $d \in \mathbb{N}$, $A^d \in \text{vect}(I_p, A, \dots A^{m-1})$.
Donc $\mathbb{K}[A] \subset \text{vect}(I_p, A, \dots A^{m-1})$.
On a trouvé une famille génératrice de $\mathbb{K}[A]$, composée de m éléments. Donc $r \leqslant m$.

/2,5

$$\boxed{\text{Par double inégalité : } r = m}$$

2. **Décomposition de Dunford**

On se place dans le corps $\mathbb{C}$, algébriquement clos. On suppose que $\Pi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{m_i}$

(a) Par dérivation d'un produit

/1,5

$$\boxed{\Pi'_A = \sum_{i=1}^{s}\left(m_i(X-\lambda_i)^{m_i-1}\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{m_j}\right)}$$

Soit $R = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_i-1}$. Alors $R|\Pi_A$ et plus précisément : $\Pi_A = R \times \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)$.

et pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, $R | m_i(X-\lambda_i)^{m_i-1}\displaystyle\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{m_j}$,

$$\text{donc } R\Big|\sum_{i=1}^{s}\left(m_i(X-\lambda_i)^{m_i-1}\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{m_j}\right) = \Pi'_A.$$

$$\text{et plus précisément : } \Pi'_A = R \times \sum_{i=1}^{s}\left(m_i\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)\right).$$

Donc $R|C$, supposons que $C = RC'$.

Or $C|\Pi_A$, donc $C' \Big| \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)$.

Donc les facteurs premiers de C' sont de la forme $(X-\lambda_i)$.
Supposons que $(X-\lambda_{i_0})$ est un facteur de C'.

Or $C|\Pi'_A$, donc $C' \Big| \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\left(m_i\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)\right)$, donc $X-\lambda_{i_0} \Big| \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\left(m_i\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)\right)$.

Or pour tout $i \neq i_0$, $X-\lambda_{i_0} \Big| \left(m_i\displaystyle\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)\right)$, donc par addition : $X-\lambda_{i_0} \Big| \left(m_i\displaystyle\prod_{j\neq i_0}(X-\lambda_j)\right)$.

Ceci est impossible car tout les λ_j sont distincts.
Donc C' est une constante.

/2,5

$$\boxed{C = R = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_i-1}}$$

(b) On l'a déjà calculé

$$\boxed{S = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)}$$ /1

On remarque que S un polynôme scindé à racines simples.

Et par ailleurs $S' = \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\left(\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)\right)$ Si $(X-a)$ est un facteur premier de $S\wedge S'$, alors (comme à la question précédente) :

— $(X-a)|S$, donc $a\in\{\lambda_i, \in\mathbb{N}_s\}$.

— supposons $a=\lambda_h$.

Comme $(X-a)|S'$ et $(X-a)|\prod_{j\neq h}(X-\lambda_j)$, alors $(X-a)|\displaystyle\prod_{j\neq h}(X-\lambda_j)$.

Impossible.

$$\boxed{S\wedge S' = 1}$$ /1,5

(c) Prenons $\mu=\max(m_i, i\in\mathbb{N}_s)$, alors pour tout $i\in\mathbb{N}_s$, $(X-\lambda_i)^{m_i}|(X-\lambda_i)^{\mu}$.

Puis le produit :

$$\boxed{\Pi_A = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_i} \mid \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{\mu} = S^{\mu}}$$ /1

(d) Comme S' est premier avec S, alors S' est premier avec S^{μ}.

En effet si R est un facteur irréductible de S^{μ} et de S',

alors c'est un facteur irréductible de S et de S',

c'est donc un facteur irréductible de $S\wedge S'=1$. Donc $R=1$.

Puis comme Π_A divise S^{μ}, alors $\Pi_A\wedge S'=1$.

En effet, si $R|\Pi_A$ et $R|S'$, alors $R|S^{\mu}$ et $R|S'$, donc $R|1$.

On peut appliquer le théorème de Bézout :

/2

$$\boxed{\text{il existe } U \text{ et } V\in\mathbb{C}[X] \text{ tel que } U\Pi_A + VS' = 1}$$

Puis $U(A)\Pi_A(A)+V(A)\times S'(A) = 1(A) = I_p$.

Or $\Pi_A(A)=0$, car Π_A est le polynôme minimal de A.

/1

$$\boxed{V(A)\times S'(A) = I_p}$$

(e) On définit par récurrence, *si possible selon la méthode de Newton* :

$$X_0 = A \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}, X_{n+1} = X_n - S(X_n)\times[S'(X_n)]^{-1}$$

i. On démontre le résultat par récurrence.

Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$\mathcal{P}_n$: « $X_n\in\mathbb{C}[A]$, $S'(X_n)$ est inversible, $[S'(X_n)]^{-1}\in\mathbb{C}[A]$ et $S(X_n)\in S^{2^n}(A)\mathbb{C}[A]$ ».

— $X_0 = A\in\mathbb{C}[A]$.

$S'(X_0) = S'(A)$. Or $V(A)\times S'(A) = I_p$,

donc $S'(X_0)$ est bien inversible et $[S'(X_0)]^{-1}\in\mathbb{K}[A]$.

$S(X_0) = S(A)\in S^1(A)\cdot\mathbb{K}[X]$.

Par conséquent $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée.

Donc $S'(X_n)$ est inversible et donc $X_{n+1} = X_n - S(X_n)\times S'(X_n)$ est bien définie.

Puis comme $X_n\in\mathbb{C}[A]$, il en est de même de $S(X_n)$

et comme également $[S'(X_n)]^{-1}$ (d'après $\mathcal{P}_n$), alors X_{n+1} est un polynôme en A.

Supposons que $S' = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, donc

$$S'(X_{n+1}) - S'(X_n) = \sum_{k=0}^{d} a_k[X_{n+1}^k - X_n^k] = [X_{n+1}-X_n]\times\sum_{k=0}^{d}\left(a_k\sum_{i=0}^{k-1}X_{n+1}^i X_n^{k-1-i}\right)$$

car X_{n+1} et X_n commutent, car ce sont tous les deux des polynômes en A.

Donc $S'(X_{n+1}) - S'(X_n)\in(X_{n+1}-X_n)\cdot\mathbb{C}[A] = S(X_n)S'(X_n)^{-1}\cdot\mathbb{C}[A]$.

Ainsi $S'(X_{n+1}) - S'(X_n) \in S(X_n) \cdot \mathbb{C}[A]$.
Or d'après $\mathcal{P}_n$, $S(X_n) \in S^{2^n}(A) \cdot \mathbb{C}[A]$,
donc $[S'(X_{n+1}) - S'(X_n)]^\mu \in S^{\mu 2n}(A) \cdot \mathbb{K}[A] = \{0\}$.
Donc $S'(X_{n+1}) - S'(X_n) = N$ est nilpotente.
Ainsi $S'(X_{n+1}) = N + S'(X_n)$, avec $S'(X_n)$ inversible d'après $\mathcal{P}_n$
et $S'(X_n)$ est un polynôme en A, comme X_n et N.
Donc N et $S'(X_n)$ sont deux polynômes qui commutent.
Et donc $(N + S'(X_n)) = S'(X_n)(\underbrace{S'(X_n)^{-1}N}_{=N'} + I_p)$.

Or, par commutation :

$$(I_p + N')(\sum_{k=0}^{r}(-1)kN'^k = I_p + (-1)^{r+1}N'^{r+1} = I_p + (-1)^{r+1}N^{r+1}(S'(X_n)^{-1})^{r+1} = I_r$$

Donc $S'(X_{n+1})$ est le produit de deux matrices inversibles,
donc $S'(X_{n+1})$ est inversible.
On notera également que $[S'(X_n)]^{-1}$ est un polynôme en A :
c'est le produit $(N' + I_p)^{-1} \times [S'(X_n)]^{-1} = \sum_{k=0}^{r}(-1)kN'^k \times R(A)$ d'après $\mathcal{P}_n$.

Enfin, dernier point : $S(X_{n+1}) \in S^{2^{n+1}}(A)\mathbb{C}[A]$
$S(X_{n+1}) = S(X_n + Y)$, avec $Y = -S(X_n) \times [S'(X_n)]^{-1} \in \mathbb{C}[A]$
donc il existe $R \in \mathbb{C}[A]$ tel que $S(X_{n+1}) = S(X_n) + YS'(X_n) + Y^2R(A)$
(en fait $R(A)$ est d'abord un polynôme des deux variables X_n et Y,
mais chacune est variable polynomiale en A)
donc il existe $R' \in \mathbb{C}[A]$, tel que

$$S(X_{n+1}) = S(X_n) - S(X_n) \times [S'(X_n)]^{-1} \times S(X_n) + [S(X_n)]^2R'(A) = [S(X_n)]^2R'(A)$$

Enfin, en appliquant $\mathcal{P}_n$, $S(X_{n+1}) \in [S^{2^n}(A)]^2 \cdot \mathbb{C}[A]$,
donc $S(X_{n+1}) \in [S^{2^{n+1}}(A)] \cdot \mathbb{C}[A]$.
Par conséquent, tous les points sont vérifiées, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. /5

$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n \in \mathbb{C}[A],\ S'(X_n) \text{ est inversible, } [S'(X_n)]^{-1} \in \mathbb{C}[A] \text{ et } S(X_n) \in S^{2^n}(A) \cdot \mathbb{C}[A].}$

ii. Pour n tel que $2^n \geqslant \mu$, alors $\Pi_A | S^{2^n}$, et $S^{2^n} \in I_A$ et donc $S^{2^n}(A) = 0$.
Ainsi, $S(X_n) = 0$ et donc $X_{n+1} = X_n$.
/1,5

$\boxed{(X_n) \text{ est stationnaire.}}$

On note $K = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_{K+1} = X_K\}$.

iii. $S(X_K) = 0$, alors que $S = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)$ est un polynôme scindé à racines simples.
Donc d'après III.3.(c), X_K est diagonalisable.
X_K est un polynôme en A et $N_K = A - X_K$ est donc également un polynôme en A.
Ainsi X_K et N_K commutent.
Enfin, $N_K = A - X_K = \sum_{i=0}^{K-1}(X_i - X_{i+1}) \in S(A) \cdot \mathbb{C}[A]$, donc N_K est nilpotente
car $S^\mu(A) = 0$.
/2

$\boxed{X_K \text{ est diagonalisable, } N_k = A - X_k \text{ est nilpotente et que } X_k \text{ et } N_k \text{ commutent.}}$

3. **Bilan**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ également (car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Il existe D, diagonalisable et N nilpotente telle que $A = D + N$ et $DN = ND$.
Comme N nilpotente et D diagonalisable alors $E(D)$ et $E(N)$ existe (d'après IV et III, respectivement).
Puis d'après IV 3., comme D et N commutent, $E(N + D)$ existe et $E(N + D) = E(N) \times E(D)$.
/2

$\boxed{\text{Donc } E(A) \text{ existe et } E(A) = E(N)E(D)}$