Devoir surveillé n°7

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème : Exponentielle de matrices

Le but du sujet est d'étudier l'exponentielle de matrices, réelles ou complexes.
Dans tout le sujet, p désigne un entier naturel non nul. Si $\mathbb{K}$ désigne un corps, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on adopte les notations suivantes.

— $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
— $\mathbb{K}_p[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus p.
— $GL_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_p(\mathbb{K})$.
— $O_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients dans $\mathbb{R}$ d'ordre p. Plus précisément :
$$O_p(\mathbb{R}) = \{M \in GL_p(\mathbb{R}) \mid M^T \times M = I_p\}$$

On rappelle (ou admet) que :

— L'**orthogonal d'un sous-espace matriciel E de $\mathbb{K}^p$** est $\{X \in \mathbb{K}^p \mid \forall\, Y \in E, Y^T \times X = 0\}$.
— On dit qu'**une suite de matrices (M_n) de $M_p(\mathbb{K})$ converge vers la matrice M**,
si la suite (M_n) converge coefficients par coefficients vers de ceux de M.

$$\text{Formellement : } (M_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M \quad : \quad \forall\, i,j \in \mathbb{N}_p, \left({}_i[M_n]^j\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left({}_i[M]^j\right)$$

— On dit qu'**une matrice M de $M_p(\mathbb{K})$ est diagonalisable**,
s'il existe une matrice $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, diagonale telles que $M = P \times D \times P^{-1}$

Si $A \in M_p(\mathbb{K})$ on définit, lorsque cette limite existe, $\quad E(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(I_p + \dfrac{1}{n}A\right)^n.$

I. Questions préliminaires.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On note $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.
   Puis calculer un équivalent de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x$ pour $n \to +\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n > -a$.
   Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)$, puis de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n et, si nécessaire, la fonction arctan.
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$.

II. Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3.

1. **Matrices antisymétriques d'ordre 2.**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer un nombre $\beta_n \in \mathbb{R}^{+*}$ et le nombre réel $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que
   $$\frac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$
   (b) En déduire que $E(A)$ existe et qu'il s'agit de la matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
   On pourra, au passage, démontrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que
   $$\begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \cos(m\theta_n) & -\sin(m\theta_n) \\ \sin(m\theta_n) & \cos(m\theta_n) \end{pmatrix}$$

2. **Matrices antisymétriques d'ordre 3.**
Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ antisymétrique, non nulle.
On suppose, pour fixer les notations, que $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(B^T \times B)$ est un nombre strictement positif.
   On note $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(B^T \times B)}$.
   (b) On note $X = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} ac \\ -ab \\ -b^2 - c^2 \end{pmatrix}$.
      i. Calculer BX, BY et BZ.
      On exprimera les résultats des calculs en fonctions de X, Y, Z et β
      ii. Calculer $X^T \times X$, $Y^T \times Y$, $Z^T \times Z$ et $X^T \times Y$, $X^T \times Z$, $Y^T \times Z$.
      iii. On suppose que $b^2 + c^2 > 0$. On note $x = \frac{1}{\beta}X$, $y = \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}Y$ et $z = \frac{1}{\beta\sqrt{b^2+c^2}}Z$.
      On note $P = (x|y|z)$ (matrice composée de trois colonnes). Calculer $B \times P$.
      iv. Et montrer que $P \in O_3(\mathbb{R})$; en déduire une expression simple de P^{-1}.
   (c) Déduire des questions précédentes l'existence de P de $O_3(\mathbb{R})$ et un réel $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(B^T \times B)}$ tels que
$$B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$
   (d) Montrer que $E(B)$ existe, on donnera son expression en fonction de P et de β.

III. Exponentielle de matrices diagonalisables.

1. **Cas de matrices diagonales.**
Soit $D \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.
On suppose, pour fixer les notations, que $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in GL_p(\mathbb{K})$.
   On donnera l'expression explicite de $E(D)$ en fonction des coefficients λ_i.
   (b) On note $\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \forall\, i \in \mathbb{N}_p, P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}\}$. Quelle est la structure de l'ensemble $\mathcal{L}$?
   Donner l'expression de Q, polynôme de degré minimal, élément de $\mathcal{L}$.
   Donner le meilleur majorant possible du degré de Q ?
   (c) Exprimer $E(D)$ en fonction de $Q(D)$.
   (d) Montrer que si D_1 et D_2 sont diagonales, alors $E(D_1 + D_2) = E(D_1) \times E(D_2)$.
   (e) Calculer $E(xI_p)$ ($x \in \mathbb{K}$), $E(0_p)$ (exponentielle de la matrice nulle), en déduire $E(D)^{-1}$.

2. **Existence et propriétés de $E(A)$ lorsque A est diagonalisable.**
Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable (cf. définition en début d'énoncé).
On suppose, pour fixer les notations, que $A = P \times D \times P^{-1}$, où D est diagonale.
   (a) Montrer que pour tout polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$, on a
$$T(A) = P \times T(D) \times P^{-1}$$
   (b) Montrer que $E(A)$ existe.
   On donnera l'expression explicite de $E(A)$ en fonction de celle de $E(D)$, de P et P^{-1}.
   (c) Soit $x \in \mathbb{K}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que
$$E(xI_p + A) = e^x E(A)$$

3. **Critère de diagonalisation**
On cherche une condition nécessaire et suffisante pour affirmer qu'une matrice est diagonalisable.
Ce critère nous servira pour répondre aux questions III.4.(d) et V.2.(e).iii.
On dit qu'un polynôme est *scindé à racines simples* si il est scindé et si les ordres de multiplicités de chaque racine valent 1.

(a) On suppose que A est diagonalisable.
Montrer qu'il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule A.

(b) On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{K}[X]$, scindé, à racines simples tel que $T(A) = 0$.

On suppose, pour fixer les notations, que $T = \prod_{i=1}^{r}(X - \mu_i)$, avec $\mu_i \neq \mu_j$ dès que $i \neq j$.

On note, pour $i \in \mathbb{N}_r$, $E_i = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \mu_i X\}$ et $T_i = \prod_{j \neq i}(X - \mu_j)$.

i. Montrer qu'il existe $U_1, \dots U_r \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\sum_{i=1}^{r} U_i T_i = 1$.

ii. En déduire : pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $X = \sum_{i=1}^{r}[U_i(A)T_i(A)]X$, puis $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) = \sum_{i=1}^{r} E_i$

iii. On note, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $\mathcal{B}_i = (X_{1,i}, \dots X_{a_i,i})$ une base de E_i, puis

$$P = (X_{1,1}|\cdots|X_{a_1,1}|X_{1,2}|\cdots|X_{a_2,2}|\cdots|X_{1,r}|\cdots|X_{a_r,r})$$

Montrer que P est inversible.

iv. Montrer que $P^{-1} \times A \times P$ est une matrice diagonale (que l'on donnera).
On pourra faire le calcul matriciel $A \times P$ par blocs colonne et reconnaitre un calcul de la forme $P \times D$...

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir affirmer que A est diagonalisable.

4. **Exponentielle de la somme.**
Soient $A, B \in M_p(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables. On suppose que A *et* B *commutent.*
Quitte à multiplier par des matrices d'opérations élémentaires à gauche et à droite,
il est possible de trouver $P_1 \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $A = P_1 \times D \times P_1^{-1}$,

où D est de la forme $\begin{pmatrix} d_1 I_{n_1} & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & d_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_r I_{n_r} \end{pmatrix}$ où $d_i \neq d_j$

(les 0 qui figurent dans cette matrice sont des matrices rectangulaires nulles).
On note alors $C = P_1^{-1} \times B \times P_1$.

(a) Montrer que C est diagonalisable et que C et D commutent.

(b) En déduire que C est de la forme $\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_r \end{pmatrix}$

où pour tout réel $i \in \mathbb{N}_r$, C_i est une matrice carrée d'ordre n_i.

(c) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, C_i est diagonalisable.

(d) Conclure qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

(e) En déduire que $E(A + B)$ existe et que $E(A + B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.

IV. Exponentielle de matrices nilpotentes.

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (on dit que A est nilpotente d'ordre k).
Soit également $B \in M_p(\mathbb{C})$ (<u>on ne suppose rien sur B</u>).

1. (a) Montrer que, pour $j \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, Ker (A^{j-1}) est inclus strictement dans Ker (A^j).
(C'est-à-dire : Ker $(A^{j-1}) \subset$ Ker A^j et Ker $(A^{j-1}) \neq$ Ker A^j).

(b) En déduire que $k \leqslant p$.

2. Montrer que $E(A)$ existe.
On pourra appliquer la formule du binôme de Newton, puis passer à la limite et obtenir un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(A) = E(A)$

3. Soit $B \in M_p(\mathbb{C})$. On suppose que A et B commutent et que $E(B)$ existe.
On admet que, pour tout entier i compris entre 1 et p,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-i}$$

Montrer que $E(A + B)$ existe et que $E(A + B) = E(A)E(B)$.

4. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.
5. Montrer que $E(A) - I_p$ est nilpotente.

V. Cas général ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$P_n(X) = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \in \mathbb{C}[X]$$

1. **Polynôme minimal**
   (a) On définit $\mathbb{C}[A] = \text{vect}(A^k, k \in \mathbb{N}\}$.
   Montrer que $\mathbb{C}[A]$ est un espace vectoriel de dimension finie.
   On note $r = \dim(\mathbb{C}[A])$.
   (b) En déduire que $I_A = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0\}$, l'ensemble des polynômes annulateurs de A, est non réduit à $\{0\}$.
   (c) On note $m = \min\{\deg(P), P \in I_A, P \neq 0\}$ et $\Pi \in I_A$, unitaire tel que $\deg \Pi = m$.
   Montrer que $I_A = \Pi \cdot \mathbb{C}[X]$ (*on pourra faire une division euclidienne*).
   (d) Quel rapport entre r et m ?

   Π ainsi définie est unique, on l'appelle le polynôme minimal de A, on le note plutôt Π_A.

2. **Décomposition de Dunford**
   On se place dans le corps $\mathbb{C}$, algébriquement clos. On suppose que $\Pi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{m_i}$
   (a) Soit $C = \Pi_A \wedge \Pi'_A$, le PGCD de Π_A et de Π'_A.
   Exprimer Π'_A. En déduire une expression sous forme de produits de C
   (b) On note S tel que $\Pi_A = S \times C$.
   Exprimer simplement S, en fonction des λ_i. En déduire que $S \wedge S' = 1$
   (c) Montrer également qu'il existe $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $\Pi_A | S^\mu$.
   (d) En déduire qu'il existe U et $V \in \mathbb{C}[X]$ tel que

   $$U\Pi_A + VS' = 1$$

   puis que $V(A) \times S'(A) = I_p$.
   (e) (**) On définit par récurrence, *si possible selon la méthode de Newton* :

   $$X_0 = A \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n - S(X_n) \times [S'(X_n)]^{-1}$$

   i. Montrer, en une seule récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $X_n \in \mathbb{C}[A]$, $S'(X_n)$ est inversible, $[S'(X_n)]^{-1} \in \mathbb{C}[A]$ et $S(X_n) \in S^{2^n}(A) \cdot \mathbb{C}[A]$.
   On pourra calculer $S'(X_{n+1}) - S'(X_n) \dots$
   ii. Montrer que (X_n) est stationnaire. On note $K = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_{n+1} = X_n\}$.
   iii. Montrer que X_K est diagonalisable, $N_K = A - X_K$ est nilpotente et que X_K et N_K commutent.

   On dit que l'on a obtenu la *décomposition de Dunford* de la matrice A :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), \exists\, D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \text{ diagonalisalble, } N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \text{ nilpotente telles que } A = D+N \text{ et } D\times N = N\times D$$

3. **Bilan**
   Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, admet une exponentielle $E(A)$.
   Comment calculer $E(A)$, en exploitant la décomposition de Dunford ?