Devoir à la maison n°9
CORRECTION

Problème : Autour des matrices « normales »

A. Exemples et premières propriétés

1. On considère $N = \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 0 \\ -2i & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix}$.
   (a) On a simplement
   $$\boxed{N^\star = \begin{pmatrix} 1-i & 2i & 0 \\ -2i & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix}}$$
   (b) Les calculs donnent
   $$N \times N^\star = \begin{pmatrix} 6 & -4+4i & 2i \\ -4-4i & 7 & 3 \\ -2i & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad N^\star \times N = \begin{pmatrix} 6 & 4+4i & 2i \\ 4-4i & 7 & 3 \\ -2i & 3 & 6 \end{pmatrix}$$
   $$\boxed{\text{Donc } N \text{ n'est pas une matrice normale}}$$
2. Soit A une matrice inversible. On a alors $A \times A^{-1} = I_n$.
   Si l'on transpose cette relation, cela donne : ${}^t(A^{-1}) \times^t A =^t I_n = I_n$, puis on passe à la forme conjugué : $\overline{{}^t(A^{-1})} \times \overline{{}^tA} = \overline{I_n} = I_n$.
   Donc : $\overline{{}^t(A^{-1})} \times A^\star = I_n$.
   Ainsi, $A^\star$ est inversible à gauche, donc
   $$\boxed{A^\star \text{ est inversible et } (A^\star)^{-1} = \overline{{}^t(A^{-1})} = (A^{-1})^\star.}$$

Remarques !
On démontre l'inversibilité à droite de la même façon, mais on sait aussi que l'inversibilité à gauche est suffisante lorsque la matrice est carrée

3. On suppose qu'il existe $T = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ tel que $A^\star = T(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$ (avec $A^0 = I_n$).
   Alors
   $$A \times A^\star = A \times T(A) = \sum_{k=0} a_k A^{k+1} = T(A) \times A = A^\star \times A$$
   $$\boxed{\text{Ainsi } A \text{ est une matrice normale}}$$
   On notera que dans ce cas : $A \times A^\star = Q(A)$ avec Q le polynôme XT.

Remarques !
La réciproque est vraie, mais pas immédiate :
si A est normale, alors $A^\star$ est un polynôme en A

B. Structures algébriques

1. (a) Si A et B sont normales, il n'y a pas de raison que $A+B$ le soit.
On considère $n=2$ et $A=E_{1,1}$, donc $A^\star=A$ et $AA^\star=A^\star A=E_{1,1}=A$.
$B=E_{1,2}-E_{2,1}$, donc $B^\star=-B$ et $BB^\star=-B^2=B^\star B(=-I_2)$.
Ainsi A et B sont normales.
Alors que $(A+B)(A+B)^\star=A^2-B^2-AB+BA=E_{1,1}+I_2-E_{1,2}-E_{2,1}$
et $(A+B)^\star(A+B)=A^2-B^2-BA+AB=E_{1,1}+I_2+E_{1,2}+E_{2,1}$
Ainsi $(A+B)(A+B)^\star\neq(A+B)^\star(A+B)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } (\mathcal{N}_n(\mathbb{K}),+,\cdot) \text{ n'est pas un espace vectoriel}}$$

(b) On considère les mêmes matrices que pour la question précédente.
$AB=E_{1,1}(E_{1,2}-E_{2,1})=E_{1,2}$ et $(AB)^\star=E_{2,1}$.
On a alors $(AB)\times(AB)^\star=E_{1,2}E_{2,1}=E_{1,1}$, alors que $(AB)^\star\times(AB)=E_{2,1}E_{1,2}=E_{2,2}$.
Donc, bien que A et B soient normales, AB n'est pas une matrice normale.

$$\boxed{\text{Ainsi } (\mathcal{N}_n(\mathbb{K}),\times) \text{ n'est pas un groupe}}$$

2. On va montrer que la somme est directe, puis, pour conclure, on utilisera les dimensions.
Soit $X\in F\cap F^\perp$. On suppose que X est une matrice colonne de coefficients (x_i)
Alors ${}^t\overline{X}\times X=\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^2=0$
car comme $X\in F^\perp$, donc pour tout $Y\in F$, ${}^t\overline{Y}X=0$,
or $X\in F$, ainsi ${}^t\overline{X}X=0$.
Comme la somme de nombres positifs $|x_i|^2$ est nulle, alors pour tout $i\in\mathbb{N}_n$, $x_i=0$.
Et ainsi X est la colonne nulle.
Donc $F\cap F^\perp=\{0\}$. La somme est directe
$F\subset\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc F est de dimension finie. Soit $p=\dim F$.
On considère $(X_1,X_2,\dots X_p)$ une base de F.

$$Z\in F^\perp \iff \forall\ X\in F,{}^t\,\overline{X}Z=0$$

En particulier pour $X=X_i$, ${}^t\overline{X_i}Z=0$.
Mais la réciproque est vraie : si pour tout $i\in\mathbb{N}_p$, ${}^t\overline{X_i}Z=0$,
alors pour tout $X\in F$, $X=\displaystyle\sum_{i=1}^p\lambda_iX_I$ et donc ${}^t\overline{X}Z=0=\displaystyle\sum_{i=1}^p\lambda_i^t\overline{X_i}Z=0$.
Donc $F^\perp=\{Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\mid\forall\ i\in\mathbb{N}_p^t\overline{X_i}Z=0\}$.
La famille $(X_1,X_2,\dots X_p)$ est libre, on peut la compléter en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, notée $(X_1,\dots X_p,X_{p+1},\dots X_n)$.
Notons M, la matrice dont les colonnes sont $(X_1|X_2|\dots|X_n)$. M est inversible.
Soit M^{-1} l'inverse de M, puis notons $(Y_1|Y_2|\dots|Y_n)$ les colonnes de ${}^tM^{-1}$.

$$M^{-1}\times M=I_n\Longrightarrow^t M\times^t M^{-1}=I_n\Longrightarrow\forall\ i,j\in\mathbb{N}_n,^t\overline{X_i}\times Y_j=\delta_{i,j}$$

Donc, en particulier pour $j\geqslant p$: $\forall\ i\in\mathbb{N}_p,^t\overline{X_i}\times Y_j=0$, et donc $Y_j\in F^\perp$.
La famille $(Y_{p+1},\dots Y_n)$ étant libre, (car M^{-1} inversible), on a donc
$\dim(F^\perp)\geqslant\operatorname{card}(Y_{p+1},\cdots,Y_n)=n-(p+1)+1=n-p=\dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})-\dim F$.
Enfin, la somme étant directe dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:
$\dim F+\dim F^\perp=\dim(F\oplus F^\perp)\leqslant\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On a donc l'égalité : $\dim F+\dim F^\perp=\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$$\boxed{F\oplus F^\perp=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\text{ les espaces } F \text{ et } F^\perp \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$$

C. Matrice normale et noyau

Soit A une matrice normale d'ordre n.

1. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. On suppose que $M=(m_{i,j})$.
Soit $X=(x_i)_{i\in\mathbb{N}_n}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, une matrice colonne.
On note $Y=(y_i)_{i\in\mathbb{N}_n}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, la matrice colonne égale à $M\times X$.
Le calcul est immédiat :

$$\boxed{\forall\ i\in\mathbb{N}_n,\ y_i=\sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j}$$

Puis

$$\boxed{{}^t\overline{X} \times M^\star M \times X = {}^t\,\overline{Y}Y = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i}y_i = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2.}$$

2. Soit $X \in \text{Ker } M$, alors $MX = 0$ et donc $M^\star MX = M^\star 0 = 0$.
   donc $X \in \text{Ker } (M^\star M)$. Ainsi $\text{Ker } M \subset \text{Ker } (M^\star M)$.
   Réciproquement, soit $X \in \text{Ker } (M^\star M)$. Notons $Y = MX$
   alors $M^\star MX = 0$ et donc ${}^t\overline{X}M^\star MX = 0$
   et donc d'après la question précédente : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = 0$.
   Or chaque terme additionné est un réel positif, une telle somme est nulle ssi $\forall\ i \in \mathbb{N}_n$, $y_i = 0$.
   On a donc $Y = 0$, i.e. $MX = 0$ et ainsi $X \in \text{Ker } M$.
   On a donc obtenu : $\text{Ker } (M^\star M) \subset \text{Ker } M$.
   Ainsi,

$$\boxed{\text{par double inclusion, pour toute matrice } M\text{, on a Ker } M = \text{Ker } (M^\star M)}$$

3. Le résultat précédent est vrai pour toute matrice, donc :
   $\text{Ker } A = \text{Ker } (A^\star A)$ (cas $M = A$), mais aussi $\text{Ker } (A^\star) = \text{Ker } (A^\star)^\star A^\star)$ (cas $M = A^\star$).
   Or $(A^\star)^\star = A$ (il suffit d'écrire ce que cela signifie).
   Enfin, comme A est normale : $AA^\star = A^\star A$, et donc tous ces noyaux sont identiques.

$$\boxed{\text{Pour } A\text{, matrice normale : Ker } A = \text{Ker } (A^\star A) = \text{Ker } (AA^\star) = \text{Ker } A^\star.}$$

4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(A - \lambda I_n)^\star = {}^t\overline{(A - \lambda I_n)} = {}^t\,(\overline{A} - \overline{\lambda}I_n) = {}^t\,\overline{A} - \overline{\lambda}{}^t I_n = A^\star - \overline{\lambda}I_n$$

$$\boxed{(A - \lambda I_n)^\star = A^\star - \overline{\lambda}I_n}$$

5. Tout d'abord, notons que $(A - \lambda I_n)$ est une matrice normale :
   $(A - \lambda I_n) \times (A - \lambda I_n)^\star = (A - \lambda I_n)(A^\star - \overline{\lambda}I_n) = AA^\star - \lambda A^\star - \overline{\lambda}A + |\lambda|^2 I_n$.
   $(A - \lambda I_n)^\star \times (A - \lambda I_n) = (A^\star - \overline{\lambda}I_n)(A - \lambda I_n) = A^\star A - \lambda A^\star - \overline{\lambda}A + |\lambda|^2 I_n$.
   On a donc $(A - \lambda I_n) \times (A - \lambda I_n)^\star = (A - \lambda I_n)^\star \times (A - \lambda I_n)$ car $AA^\star = A^\star A$.
   On a alors la suite d'équivalences suivante :
   $A \times Y = \lambda Y \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n)Y = 0 \Longleftrightarrow Y \in \text{Ker } (A - \lambda I_n)$
   $\Longleftrightarrow Y \in \text{Ker } (A - \lambda I_n)^\star \Longleftrightarrow Y \in \text{Ker } (A^\star - \overline{\lambda}I_n) \Longleftrightarrow A^\star Y = \overline{\lambda}Y$.
   Ainsi,

$$\boxed{\text{pour } Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ on a l'équivalence : } A \times Y = \lambda Y \Longleftrightarrow A^\star \times Y = \overline{\lambda}Y.}$$

6. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $Y, Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, telles que $AY = \lambda Y$ et $AZ = \mu Z$, donc $A^\star Z = \overline{\mu}Z$.

$$\lambda {}^t\overline{Z}Y = {}^t\,\overline{Z}\lambda Y = {}^t\,\overline{Z}AY = {}^t\,\left(\overline{(A^\star Z)}\right)Y = {}^t\,\left(\overline{\overline{\mu}Z}\right)Y = \mu {}^t\overline{Z}Y$$

   Donc $(\lambda - \mu){}^t\overline{Z} \times Y = 0$. Mais comme $\lambda \neq \mu$, on a donc

$$\boxed{{}^t\overline{Z} \times Y = 0.}$$

Remarques !

Ce résultat signifie que pour une matrice normale, deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont nécessairement orthogonaux

7. Nous avons déjà vu que $\text{Ker } A^\star = \text{Ker } A$.
   On a les équivalences (comme $\text{Im } A = \{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\}$) :

$$Z \in (\text{Im } A)^\perp \Longleftrightarrow \forall\ Y \in \text{Im } A, {}^t\,\overline{Y}Z = 0 \Longleftrightarrow \forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), {}^t\,(\overline{AX})Z = 0$$

   Or ${}^t(\overline{AX})Z = {}^t\,\overline{X}{}^t\overline{A}Z = {}^t\,\overline{X}A^\star Z$.
   En prenant $X = E_i$ (matrice colonne avec un seul 1 en i$^{\text{e}}$position, les autres nombres sont nuls),
   on a : ${}^t\overline{E_i}A^\star Z = {}^t\,E_i \times (A^\star Z) = (A^\star Z)_i$, i$^{\text{e}}$coordonnées de la matrice colonne $A^\star Z$.
   Donc

$$\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), {}^t\,(\overline{AX})Z = 0 \Longleftrightarrow \forall\ i \in \mathbb{N}_n (A^\star Z)_i = 0 \Longleftrightarrow A^\star Z = 0$$

   Par conséquent :

$$Z \in (\text{Im } A)^\perp \Longleftrightarrow Z \in \text{Ker } (A^\star)$$

   et donc

$$\boxed{(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker } A^\star = \text{Ker } A}$$

8. Si $X \in \text{Ker } A$, alors $AX = 0$ et donc $A^2X = A0 = 0$, donc $X \in \text{Ker } A^2$.
   On a donc $\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^2$.
   Réciproquement, considérons $X \in \text{Ker } A^2$.
   Alors $AX \in \text{Im } A$
   et $A \times AX = A^2X = 0$, donc $AX \in \text{Ker } A$.
   Ainsi $AX \in \text{Im } A \cap \text{Ker } A = \text{Im } A \cap (\text{Im } A)^\perp = \{0\}$ (vu en fin de partie B).
   cela impose $AX = 0$ donc $X \in \text{Ker } A$.
   Par double inclusion
   $$\boxed{\text{Ker } A^2 = \text{Ker } A}$$
   Ce résultat est vrai pour tout matrice A normale,
   or on a vu que $(A - \lambda I_n)$ est également une matrice normale.
   Par conséquent, on a également
   $$\boxed{\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C},\ \text{Ker } (A - \lambda I_n)^2 = \text{Ker } (A - \lambda).}$$

Remarques !
Ce résultat signifie que pour une matrice normale A, l'ordre de multiplicité algébrique et géométrique de toute valeur propre de cette matrice sont égaux.
Ceci est une condition nécessaire et suffisante pour affirmer que A est diagonalisable...

C. Matrices normales et trace

On admet ici que si une matrice H vérifie $H^\star = H$ (on dit que H **est hermitienne**), alors il existe P inversible et D une matrice diagonale à coefficients **réels** telle que $H = PDP^{-1}$ (on dit que H **est diagonalisable réelle**).

1. Supposons que A soit une matrice normale ($AA^\star = A^\star A$).
   $$\text{tr}\big((A^\star A)^2\big) = \text{tr}(A^\star(AA^\star)A) = \text{tr}(A^\star A^\star AA) = \text{tr}(A^{\star 2}A^2)$$
   Réciproquement, supposons que $\text{tr}\big((A^\star A)^2\big) = \text{tr}(A^{\star 2}A^2)$.
   Notons $H = AA^\star - A^\star A$. Alors
   $$H^\star = {}^t\,\overline{H} = {}^t\,(\overline{AA^\star}) - {}^t\,(\overline{A^\star A})$$
   $$H^\star = {}^t\,\overline{A^\star}\,{}^t\overline{A} - {}^t\,\overline{A}\,{}^t\overline{A^\star} = AA^\star - A^\star A = H$$
   Donc H est hermitienne, il existe P et D, diagonale réelle telles que $H = PDP^{-1}$.
   En outre, par linéarité de tr (en utilisant le fait que $\text{tr}(BC) = \text{tr}(CB)$)
   $$\begin{aligned} \text{tr}(H^2) &= \text{tr}\big((AA^\star - A^\star A)(AA^\star - A^\star A)\big) \\ &= \text{tr}((AA^\star)^2) - \text{tr}(AA^\star A^\star A) - \text{tr}(A^\star AAA^\star) + \text{tr}((A^\star A)^2) \\ &= 2\text{tr}\big((A^\star A)^2\big) - 2\text{tr}(A^{\star 2}A^2) = 0 \end{aligned}$$
   Mais $\text{tr}(H^2) = \text{tr}(PD^2P^{-1}) = \text{tr}(D^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k^2$, si les coefficients de D sont les (μ_k).
   Cette somme de nombres positifs est nulle donc $\forall\ k \in \mathbb{N}_n$, $\mu_k = 0$ et ainsi $D = 0$ puis $H = 0$.
   Par conséquent : $AA^\star - A^\star A = 0$ et donc A est normale.
   Par double implication
   $$\boxed{A \text{ est une matrice normale si et seulement si } \text{tr}\big((A^\star A)^2\big) = \text{tr}(A^{\star 2}A^2).}$$

2. Si A est normale alors $A \times (AA^\star) = A \times (A^\star A) = (AA^\star)A$ et donc A et $AA^\star$ commutent.
   Réciproquement, supposons que A commute avec $AA^\star$.
   Alors $\text{tr}\big((A^\star A)^2\big) = \text{tr}(A^\star AA^\star A) = \text{tr}(AA^\star AA^\star)$ (propriété de la trace).
   $\text{tr}\big((A^\star A)^2\big) = \text{tr}(A^\star AAA^\star)$ car A et $A^\star A$ commutent.
   $\text{tr}\big((A^\star A)^2\big) = \text{tr}(A^{\star 2}A^2)$, d'après la propriété de la trace.
   Et d'après la question précédente, cela implique que A est normale.
   Par double implication
   $$\boxed{A \text{ est normale si et seulement si } A \text{ commute avec } AA^\star.}$$

3. Si A, D et F sont normaux et que $B = C = E = 0$, alors
$$M = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} ;\ M^\star M = \begin{pmatrix} A^\star A & 0 & 0 \\ 0 & D^\star D & 0 \\ 0 & 0 & F^\star F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^\star & 0 & 0 \\ 0 & DD^\star & 0 \\ 0 & 0 & FF^\star \end{pmatrix} = M^\star M.$$
Donc M est une matrice normale.
Réciproquement, si M est une matrice normale, alors $M^\star M = MM^\star$, ce qui donne :
$$\begin{pmatrix} A^\star A & A^\star B & A^\star C \\ B^\star A & B^\star B + D^\star D & B^\star C + D^\star E \\ C^\star A & C^\star B + E^\star D & C^\star C + E^\star E + F^\star F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^\star + BB^\star + CC^\star & BD^\star + CE^\star & CF^\star \\ DB^\star + EC^\star & DD^\star + EE^\star & EF^\star \\ FC^\star & FE^\star & FF^\star \end{pmatrix}$$
Il faut égaliser ces 9 matrices, elles ont en particulier nécessairement les mêmes traces.
On a ainsi : $A^\star A = AA^\star + BB^\star + CC^\star$
Et donc en considérant la trace des ces matrices : $\mathrm{tr}(A^\star A) = \mathrm{tr}(AA^\star) + \mathrm{tr}(BB^\star) + \mathrm{tr}(CC^\star)$.
Or $\mathrm{tr}(A^\star A) = \mathrm{tr}(AA^\star)$ (propriété de la trace) et donc $\mathrm{tr}(BB^\star) + \mathrm{tr}(CC^\star) = 0$.
Enfin, si on note $B = (b_{i,j})$, on a : $\mathrm{tr}(BB^\star) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\overline{b_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|^2$.
Donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}|^2 = 0$ cela impose : $\forall\ i, j \in \mathbb{N}_n$, $b_{i,j} = c_{i,j} = 0$
Et par conséquent, $B = C = 0$.
De même avec le terme au centre de la matrice $MM^\star$, on a $E = 0$.
Ainsi la matrice M devient diagonale par blocs, le calcul $MM^\star = M^\star M$ donne alors :
$AA^\star = A^\star A$, $DD^\star = D^\star D$ et $EE^\star = E^\star E$ c'est-à-dire A, D et E normales.
Par double implication :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \text{ est normale si et seulement si } A, D \text{ et } F \text{ sont normaux et } B = C = E = 0.}$$

4. Nous avons vu (B.2.) que $\mathrm{Ker}\ M = \mathrm{Ker}\ (M^\star M)$.
Mais $M^\star M = N^\star N$, donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ M = \mathrm{Ker}\ (M^\star M) = \mathrm{Ker}\ (N^\star N) = \mathrm{Ker}\ N}$$

En ce qui concerne les images, notons déjà que $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $MM^\star X = M(M^\star X)$,
donc $MM^\star X \in \mathrm{Im}\ M$.
Et donc on a l'inclusion simple : $\mathrm{Im}\ MM^\star \subset \mathrm{Im}\ M$.
Puis, on va vérifier l'égalité des dimensions, en appliquant le théorème du rang.
$\dim(\mathrm{Im}\ MM^\star) = n - \dim \mathrm{Ker}\ MM^\star = n - \dim \mathrm{Ker}\ M^\star = \mathrm{rang}\ (M^\star)$.
Or on sait que $\mathrm{rang}\ (B) = \mathrm{rang}\ ({}^tB)$ (cours) et de même $\mathrm{rang}\ (\overline{B}) = \mathrm{rang}\ (B)$
(on peut démontrer cela avec la décomposition $B = P \times J_r \times Q$.
ou en montrant que $\Phi : Y \mapsto \overline{Y}$ est bijective de Im B sur Im $\overline{B}$).
Donc $\dim(\mathrm{Im}\ MM^\star) = \dim(\mathrm{Im}\ M^\star) = \dim(\mathrm{Im}\ M)$.
On a donc l'égalité $\mathrm{Im}\ MM^\star = \mathrm{Im}\ M$ et de même $\mathrm{Im}\ NN^\star = \mathrm{Im}\ N$.
Et comme $MM^\star = NN^\star$, on en déduit :

$$\boxed{\mathrm{Im}\ M = \mathrm{Im}\ N}$$

5. Considérons $K = \begin{pmatrix} 0 & M^\star \\ N & 0 \end{pmatrix}$, donc $K^\star = \begin{pmatrix} 0 & N^\star \\ M & 0 \end{pmatrix}$.
Alors $K^\star K = \begin{pmatrix} N^\star N & 0 \\ 0 & MM^\star \end{pmatrix}$ et $KK^\star = \begin{pmatrix} M^\star M & 0 \\ 0 & NN^\star \end{pmatrix}$.
Ainsi, K est une matrice normale ssi (H_1) : $\begin{cases} MM^\star = NN^\star \\ M^\star M = N^\star N \end{cases}$ est vérifiée.
Alors que $KKK^\star = \begin{pmatrix} 0 & M^\star NN^\star \\ NM^\star M & 0 \end{pmatrix}$ et $KK^\star K = \begin{pmatrix} 0 & M^\star MM^\star \\ NN^\star N & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi K commute avec $KK^\star$ ssi (H_2) : $\begin{cases} M^\star MM^\star = M^\star NN^\star \\ NM^\star M = NN^\star N \end{cases}$ est vérifiée.
Or d'après la question 2, on peut affirmer que K est normale ssi K et $KK^\star$ commutent.

$$\boxed{(H_1) \text{ et } (H_2) \text{ sont équivalentes (et sont équivalentes à } K \text{ normale et à } K \text{ commute avec } KK^\star).}$$