# Devoir à la maison n°1
CORRECTION

---

## Exercice

On considère le polynôme $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ de racines $x_1, x_2, x_3$.
On note $S = \dfrac{x_1x_2}{x_3} + \dfrac{x_3x_1}{x_2} + \dfrac{x_2x_3}{x_1}$

1. Le calcul donne $x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$.
   L'écriture polynomiale sous cette forme est unique, on peut identifier :
   $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & -A \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & = & B \\ x_1x_2x_3 & = & -C \end{cases}$$
2. $S = \dfrac{(x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2}{x_1x_2x_3}$. Or
   $$B^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 = (x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2 + 2(x_1^2x_2x^3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2)$$
   $$= (x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2 + 2(x_1x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = (x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2 + 2AC$$
   Donc $\underline{S = \dfrac{-B^2 + 2AC}{C}}$
3. Il suffit d'appliquer la formule précédente, avec ici : $A = -3$, $B = -1$ et $C = 1$.
   On a donc $\underline{S = \dfrac{-B^2 + 2AC}{C} = \dfrac{-6 - 1}{1} = -7}$

*Pour vérifier que le calcul précédent était bien juste, on considère un polynôme quelconque, par exemple : $(x-1)(x+2)(x-3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.*
*Et on calcule : $S = \frac{-2}{3} + \frac{-3}{2} - 6 = \frac{-49}{6}$ et $\frac{-B^2+2AC}{C} = \frac{-25-24}{6} = \frac{-49}{6}$.*
*On peut être presque certain qu'il n'y a pas d'erreurs de calculs !*

## Problème

1. Il s'agit ici du nombre de permutation d'un ensemble à $n$ éléments.
   Il y a donc $n!$ suites possibles *Pour s'en convaincre, si on ne connait pas les factorielles, il suffit de penser au la méthode de construction des suites $(c_i)$.*
   *1. $b_1$ peut être donné au $n$ $c_i$ : $n$ possibilités*
   *2. puis $b_2$ peut être donné au $n-1$ $c_i$ qui restent : $n-1$ possibilités*
   *3. puis $b_3$ peut être donné au $n-2$ $c_i$ qui restent : $n-2$ possibilités*
   *k. ...*
   *n. puis $b_n$ peut être donné au dernier $c_i$ qui reste : 1 possibilités*
   *Le décompte total est obtenu par multiplication (puis)*
2. Exemple d'application avec $n = 3$.
   Dans cet exemple : $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = 50$. Puis $b_1 = 3$, $b_2 = 4$ et $b_3 = 5$.
   Dans un tableau nous allons présenter les $3! = 6$ possibilités :

| $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $S = \sum_{i=1}^{3} a_i c_i$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 360 |
| 3 | 5 | 4 | 330 |
| 4 | 3 | 5 | 350 |
| 4 | 5 | 3 | 290 |
| 5 | 3 | 4 | 310 |
| 5 | 4 | 3 | 280 |

   *On remarque que la valeur de $S$ la plus importante correspond à $(c_i)$ rangée dans l'ordre croissant ; et la valeur de $S$ la moins importante correspond à $(c_i)$ rangée dans l'ordre décroissant.*
3. C'est la question difficile du devoir (*en terme de précision de démonstration*).
   Nous allons nous y prendre en trois temps :
   (a) D'abord nous allons voir qu'inverser sur une seule permutation l'ordre des termes fait baisser la valeur de $S_c$.
   (b) Puis nous allons appliquer une récurrence (sur $n$, la longueur de la suite) pour pouvoir généraliser à une permutation quelconque de tous les termes de la suite $(b_i)$.
   Nous nous concentrerons sur l'inégalité : $S_c \leqslant S_b$.
   (c) Enfin nous démontrons l'inégalité avec $(b_i)$ dans l'ordre décroissant ($S_{-b} \leqslant S_c$).

   (a) Nous savons que les $(a_i)$ sont en ordre croissant.
   Considérons $c$ et $c'$ deux permutations de $(b_i)$ qui ne diffèrent que de deux indices.
   Autrement écrit : il existe $i_1$ et $i_2$ tel que $c_{i_1} = c'_{i_2}$ et $c'_{i_1} = c_{i_2}$ et pour tout $i \notin \{i_1, i_2\}$, $c_i = c'_i$.
   On note $S_c$ et $S_{c'}$ les deux sommes considérées :

$$S_c - S_{c'} = \sum_{i=1}^{n} a_i(c_i - c'_i) = a_{i_1}(c_{i_1} - c'_{i_1}) + a_{i_2}(c_{i_2} - c'_{i_2})$$

   Et comme $c_{i_1} = c'_{i_2}$ et $c'_{i_1} = c_{i_2}$, on a :

$$S_c - S_{c'} = (a_{i_2} - a_{i_1})(c_{i_2} - c_{i_1})$$

   Nous savons que les $a_i$ sont rangés par ordre croissant, donc

$$S_c - S_{c'} \geqslant 0 \Longleftrightarrow c_{i_2} \geqslant c_{i_1}$$

   *Conséquence :*
   *si l'on permute deux nombres $b_i$ dans la somme $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, alors la valeur de la somme diminue si le nombre le plus grand des deux $b_i$ permutés devient associé au nombre $a_i$ le plus petit des deux (et la somme augmente dans le cas inverse).*

   (b)Nous allons maintenant faire une récurrence sur $n$, la longueur des deux listes, pour démontrer le résultat annoncé.
   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ : « Pour toutes suites de longueur $n$ : $(a_i)$ et $(b_i)$, ordonnées et $(c_i)$ permutation de $(b_i)$, on a $S_c \leqslant S_b$ »
   — Si les suites sont de longueurs 1, il n'y a qu'un seul calcul et $\mathcal{P}_1$ est évident.
   — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soient $(a_i)$cet $(b_i)$, deux suites ordonnées et de longueur $n+1$.

Soit $(c_i)$ une permutation quelconque de $(b_i)$.
Il existe $i_0 \in [\![1, n+1]\!]$, $c_{n+1} = b_{i_0}$. Notons $b'$ la permutation de $b_i$ :

$$(b_1, b_2, \cdots, b_{i_0-1}, b_{i_0+1}, \cdots b_{n-1}, b_n, b_{i_0})$$

(Autrement écrit : $b'_i = \begin{cases} b_i & \text{si} \quad i < i_0 \\ b_{i+1} & \text{si} \quad i \in [\![i_0, n]\!] \\ b_{i_0} & \text{si} \quad i_0 = n+1 \end{cases}$ )
On obtient cette suite $b'$, en faisant l'une après l'autre les permutations :
$b_{i_0} \leftrightarrow b_{i_0+1}$, puis $b_{i_0+1} \leftrightarrow b_{i_0+2}$ puis $\cdots$ $b_n \leftrightarrow b_{n+1}$
*(Dans ce cas, on peut voir $b_{i_0}$ qui remonte petit à petit jusqu'à obtenir la dernière position).*
Et donc d'après la conclusion de la partie $(a)$, on a une suite d'inégalité qui se conclue par :

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i b'_i \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i$$

Enfin, comme la suite $(b'_1, \cdots b'_n)$ est ordonnée, de longueur $n$, on peut lui appliquer $\mathcal{P}_n$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i c_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right) + a_{n+1}c_{n+1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b'_i\right) + a_{n+1}b'_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i b'_i \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i$$

car $c_{n+1} = b'_{n+1} = b_{i_0}$.
Par conséquent l'hypothèse de récurrence est vraie en $n+1$.
La récurrence est démontrée.

(c) Reste le cas de la suite $(b_i)$ décroissante. Notons $d_i = -b_{n-i+1}$. Alors

$$d_i \leqslant d_j \Leftrightarrow -b_{n-i+1} \leqslant -b_{n-j+1} \Leftrightarrow b_{n-i+1} \geqslant b_{n-j+1} \Leftrightarrow n-i+1 \geqslant n-j+1$$

car $(b_i)$ est croissante. Et donc

$$d_i \leqslant d_j \Leftrightarrow n-i+1 \geqslant n-j+1 \Leftrightarrow -i \geqslant -j \Leftrightarrow i \leqslant j$$

Donc $(d_i)$ est également croissante.
Pour toute permutation $(c'_i) = (-c_i)$ de $(d_i)$, on a donc $S_{c'} \leqslant S_d$.
En multipliant par $-1$, l'inégalité change de sens :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i = -\sum_{i=1}^{n} a_i c'_i \geqslant -\sum_{i=1}^{n} a_i d_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}$$

Conclusion : pour toute permutation $(c_i)$ de $(b_i)$, on a $\underline{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}}_{=S_{-b}} \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i c_i}_{=S_c} \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}_{=S_b}}$

**On appelle cette inégalité, l'inégalité de réarrangement**

4. Application 1. En considérant $M = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, puis $A_j = \frac{x_1 x_2 \cdots x_j}{M^j}$ et $B_j = \frac{1}{A_j}$.
Notons $(a_i)$, la suite ordonnée des $(A_i)$ (rangée dans l'ordre croissant).
Puis, $b_i = \frac{1}{a_i}$, il s'agit donc d'une suite décroissante.
Par conséquent :

$$n = \sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} A_{i+1} B_i + A_1 B_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{A_i} + A_1 \times 1$$

$$n \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{i+1}}{M} + \frac{x_1}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ce qui conduit à $\underline{\text{pour tout } x_i \in \mathbb{R}_+^* : M = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$

5. Application 2. On suppose que la suite $(a_i)$ est croissante et $(b_i)$ croissante.

   D'après les questions précédentes : $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$, où $(c_i)$ est une permutation de $(b_i)$.

   Par ailleurs : $\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$.

   Notons $c_i^k = \begin{cases} b_{i+k} & \text{si} \quad i+k \leqslant n \\ b_{i+k-n} & \text{si} \quad i+k > n \end{cases}$.

   Alors
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i c_i^k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = n \times \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

   (**Assurez-vous d'avoir bien compris l'égalité :** $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i c_i^k$ **!**)

   En divisant tout par $n^2$, on retrouve l'inégalité de Tchebychev :

   si $(a_i)$ croissante et $(b_i)$ croissante : $\dfrac{a_1b_1 + \cdots a_nb_n}{n} \geqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \times \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$.

6. Le calcul donne :
$$(a_1b_1 + \cdots a_nb_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_i a_j b_j$$
$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i^2 b_j^2$$

   Il faut différencier ces $n^2$ nombres ajoutés :

   $a_i b_j = c_k$ avec la transformation bijective : $k - 1 = (i-1) + n(j-1)$.

   *On a :* $k = 1 \Leftrightarrow (i,j) = (1,1)$ / $k = 2 \Leftrightarrow (i,j) = (2,1)$ / ... / $k = n \Leftrightarrow (i,j) = (n,1)$

   $k = n+1 \Leftrightarrow (i,j) = (1,2)$ / $k = n+2 \Leftrightarrow (i,j) = (2,2)$ / ... / $k = 2n \Leftrightarrow (i,j) = (n,2)$

   $\vdots$

   $k = n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (i,j) = (1,n)$ / $k = n+2 \Leftrightarrow (i,j) = (2,n)$ / ... / $k = n^2 \Leftrightarrow (i,j) = (n,n)$

   Notons donc pour tout $k \in [\![1, n^2]\!]$, $d_k = c_k$.

   Les deux suites (identiques) $(c_k) = (d_k)$ se rangent exactement dans le même ordre.

   Donc pour toute permutation $(d'_k)$ de $(d_k)$ :
$$\sum_{k=1}^{n^2} c_k d'_k \leqslant \sum_{k=1}^{n^2} c_k d_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i^2 b_j^2$$

   Or avec la permutation : $d'_k = d'_{(i-1)+n(j-1)+1} = a_j b_i = d_{(j-1)+n(i-1)+1}$,

   on a $c_k d'_k = a_i b_j a_j b_i$, avec $(i,j)$ défini par la relation : $k - 1 = (i-1) + n(j-1)$.
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_i a_j b_j = \sum_{k=1}^{n} c_k d'_k \leqslant \sum_{k=1}^{n^2} c_k d_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i^2 b_j^2$$

   On démontre ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$(a_1b_1 + \cdots a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$