Devoir à la maison n°2

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice

On considère $n = 2m + 1$, un entier impair.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Développer $(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})$.
2. En déduire :
$$z^n - 1 = (z - 1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(z^2 - 2z \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1 \right)$$
3. Montrer alors, en posant $a = bz$:
$$a^n - b^n = (a - b) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(a^2 - 2ab \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + b^2 \right)$$

Problème

Au XVII$^{\text{e}}$ et XVIII$^{\text{e}}$ siècle, le problème dit « de Bâle » hantait les mathématiciens européens. Il s'agit de trouver une expression fermée de la somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Il était connu que cette somme convergeait, mais on ne savait pas la valeur de cette limite. C'est Euler qui donna la réponse en 1748. Nous allons essayer de suivre sa démarche.

A. Convergence

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$
3. En déduire que la suite (S_n) est convergente et que sa limite S vérifie $S \leqslant 2$.

Donc le but du « problème de Bâle » est d'obtenir la valeur de S.

B. En exploitant la fonction cotan

On rappelle que la fonction cotan (lue cotangente) est l'application :

$$\text{cotan} : \quad]k\pi, (k+1)\pi[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

On considère $m \in \mathbb{N}$. Pour la suite du problème nous aurons besoin de la fonction :

$$f_m : \quad]-\pi, \pi[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \theta \mapsto \frac{\sin((2m+1)\theta)}{\sin^{2m+1}\theta}$$

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, écrire $\sin((2m+1)\theta)$ comme une somme de puissance de $\sin^{2k+1}\theta \cos^{2(m-k)}\theta$.
2. En déduire une expression de f_m sous la forme : $f_m(\theta) = P_m(\text{cotan}^2\theta)$, où P_m est un polynôme de degré m.
   On donnera une expression explicite de P_m (avec le symbole $\sum$)
3. En exploitant f_m, donner les m racines de P_m.

4. Sachant que pour tout polynôme de degré d : $a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, la somme de toutes ses racines vaut $\dfrac{-a_{d-1}}{a_d}$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{m} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

5. (a) En étudiant les variations de $\varphi_1 : x \mapsto \tan x - x$ et $\varphi_2 : x \mapsto \sin x - x$, montrer que

$$\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \tan x \geqslant x \qquad \text{et} \qquad \sin x \leqslant x$$

   (b) Montrer que $1 + \text{cotan}^2(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

   (c) En déduire que

$$\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \text{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \text{cotan}^2(x) + 1$$

6. Déduire des questions précédentes :

$$\frac{(2m(2m-1)}{(2m+1)^2}\frac{\pi^2}{6} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{(2m(2m-1)}{(2m+1)^2}\frac{\pi^2}{6} + \frac{m}{(2m+1)^2}\pi^2$$

7. En déduire la solution du « problème de Bâle ».

La méthode originale d'Euler était très osée… :

1. *Il montrait* $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(a^2 - 2ab\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + b^2\right)$ *(cf. exercice)*
2. *En prenant* $a = (1 + \frac{ix}{n})$ *et* $b = (1 - \frac{ix}{n})$, *il avait* $(a^n) \to e^{ix}$ *et* $(b_n) \to e^{-ix}$.
3. *Et donc en passant à la limite, il en déduisait :* $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = x\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2})$

   (Il faut exploiter le fait que si $y \approx 0$, *alors* $\cos y \approx 1 - \frac{y^2}{2}$ *(développement limité))*
4. *Enfin, il savait (pour les sommes finies) :*

   $(1-a_1x)(1-a_2x)(1-a_3x)\dots(1-a_nx) = 1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+\cdots+(-1)^n a_1a_2\dots a_nx^n$,

   résultat qu'Euler généralisait au produit infini…
5. *Il concluait :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{6}$ *car il est connu :* $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \dots$ *(en prenant* $X = \sqrt{x}$*)*