

Devoir à la maison n°3

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice

On pose

$$H(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t.$$

On rappelle que si $a > b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction H est bien définie sur $]0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$. Etudier les variations de H.
2. (a) Etudier rapidement la fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ sur $]0, +\infty[$.
   (b) En utilisant un minorant de f, déterminer la limite de H en $+\infty$ ainsi que la nature de la branche infinie en $+\infty$.
   (c) Etudier de même le comportement de H quand x tend vers 0, puis donner l'allure de la courbe représentative.

Problème : Étude des intégrales de Wallis

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x$$

I Etude classique de la suite (I_n)

1. Calculer I_0 et I_1.
2. A l'aide d'une intégration par parties (écrire $\sin^{n+2} x = \sin x \sin^{n+1} x$), montrer que pour tout entier naturel n, on a : $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$.
   En déduire I_{n+2} en fonction de I_n.
3. En déduire, pour tout entier naturel p, la valeur de I_{2p} et de I_{2p+1} à l'aide de factorielles et de puissances de 2.
4. Établir pour tout entier naturel n l'encadrement : $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.
5. En déduire que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ puis que :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p)!^2 p} = \pi$$

II Une autre méthode

1. A l'aide de changements de variables exprimer le lien entre I_n, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos u)^n \mathrm{d}u$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule du binôme, calculer

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^{2p} \mathrm{d}t$$

3. Retrouver la valeur de I_n pour n pair.

III Une autre intégrale

Calculer en fonction de n, $\displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x$.