Devoir surveillé n°8
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrment) selon la qualité des copies.

Exercice. Symbole de Zolotarev et réciprocité quadratique

1. Autour de la signature.
   (a) C'est une question de cours.
   Soit $\sigma \in S_n$,
   — σ peut s'écrire comme un produit de p cycles finis et disjoints, chacun de longueur ℓ_i.
   — σ peut également s'écrire comme un produit de R transpositions (non uniques).
   On a alors
   $$\boxed{\epsilon(\sigma) = (-1)^R = (-1)^{\sum_{i=1}^{p}(\ell_i - 1)} = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}}$$ /1

   (b) On exploite la formule avec l'écriture sous forme de produit de cycle.
   On ne tient pas compte des points fixes dans le calcul car $\ell_i = 1$, dans ce cas. /1
   $$\boxed{\epsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}}$$

2. Signature sur un ensemble fini quelconque.
   (a) Par composition d'applications bijectives : τ_φ est une bijection.
   $\varphi : E_n \to F_n$, $\tau : F_n \to F_n$ et $\varphi^{-1} : F_n \to E_n$, donc $\tau_\varphi : E_n \to E_n$. /1
   $$\boxed{\tau_\varphi \text{ est une permutation sur } E_n \text{ (un élément de } S_n\text{).}}$$

   (b) Soient φ et ψ deux bijections de E_n sur F_n. Alors
   $$\varphi \circ \tau_\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \tau = \psi \circ \tau_\psi \circ \psi^{-1}$$
   Ainsi
   $$\tau_\varphi = \varphi^{-1}\psi \circ \tau_\psi \circ \psi^{-1}\varphi = \left(\psi^{-1}\varphi\right)^{-1} \tau_\psi \left(\tau^{-1}\varphi\right)$$
   Or τ_φ, $\tau_\psi \in S_n$ et également $\psi^{-1}\varphi : E_n \to E_n$, bijective donc $\psi^{-1}\varphi \in S_n$
   $$\epsilon(\tau_\varphi) = \epsilon\left(\left(\psi^{-1}\varphi\right)^{-1}\right)\epsilon(\tau_\psi)\epsilon\left(\psi^{-1}\varphi\right) = \epsilon(\tau_\psi)\epsilon\left(\left(\psi^{-1}\varphi\right)^{-1}\right)\epsilon\left(\psi^{-1}\varphi\right) = \epsilon(\tau_\psi)\epsilon(\mathrm{id}) = \epsilon(\tau_\psi)$$
   (on exploite : $\epsilon(\sigma_1\sigma_2) = \epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma_2) = \epsilon(\sigma_2)\epsilon(\sigma_1)$) /1,5
   $$\boxed{\text{Pour toutes bijections } \varphi \text{ et } \psi \text{ de } E_n \text{ sur } F_n,\ \epsilon(\tau_\varphi) = \epsilon(\tau_\psi).}$$

   Ainsi, $\epsilon(\tau_\varphi)$ st indépendante de la fonction d'énumération φ choisie.
   On la note donc $\epsilon(\tau)$, et on définit ainsi la signature de toute bijection d'un ensemble fini.

   (c) On note $c_{+a} : \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \to \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, $\overline{x} \mapsto \overline{x+a}$.
   et $\varphi : E_n \to \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, $k \mapsto \overline{k}$ (la classe de k, pour la relation $\equiv [n]$).
   Soit $i \in E_n$ et $i \neq n$, alors $\varphi^{-1} \circ c_{+1} \circ \varphi(i) = \varphi^{-1} \circ c_{+1}(\overline{i}) = \varphi^{-1}(\overline{i+1}) = i+1$.
   et pour $i = n$: $\varphi^{-1} \circ c_{+1} \circ \varphi(n) = \varphi^{-1} \circ c_{+1}(\overline{n}) = \varphi^{-1} \circ c_{+1}(\overline{0}) = \varphi^{-1}(\overline{1}) = 1$ /1
   $$\boxed{\text{Donc } \varphi^{-1} \circ c_{+1} \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}\text{, cycle de longueur } n}$$

   Puis, en exploitant la réponses à la question 1.(b) : /0,5
   $$\boxed{\epsilon(c_{+1}) = \epsilon(\varphi^{-1} \circ c_{+1} \circ \varphi) = (-1)^{n-1}}$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant n$. Pour tout $\overline{h} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$,

$$c_{+k}(\overline{h}) = \overline{h+k} = \overline{h + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k \text{ fois}}} = \underbrace{c_{+1} \circ c_{+1} \ldots c_{+1}}_{k \text{ fois}}(\overline{h}) = c_{+1}^k(\overline{h})$$

$$\boxed{\text{Donc } c_{+k} = (c_{+1})^k, \text{ (puissance au sens de la composition)}}$$ /1,5

On a alors

$$\boxed{\epsilon(c_{+k}) = \epsilon\left(c_{+1}^k\right) = \left(\epsilon(c_{+1})\right)^k = (-1)^{k(n-1)}}$$ /0,5

3. Pour $\sigma \in S_n$ et $\tau \in S_m$, on note

$$\sigma + \tau : E_n \uplus E_m \to E_n \uplus E_m, \ (a,i) \mapsto \begin{cases} (a, \sigma(i)) & \text{si } a = 1 \\ (a, \tau(i)) & \text{si } a = 2 \end{cases}$$

Puis, on note

$$\Phi : E_n \oplus E_m \to E_{n+m}, (a,i) \to \begin{cases} i & \text{si } a = 1 \\ i+n & \text{si } a = 2 \end{cases}$$

(a) Notons que Φ est bien à valeur dans E_{n+m}.
Pour tout $r \in E_{n+m}$, si $r \leqslant n$, alors $\Phi(1,r) = r$ et si $r > n$, $\Phi(2, r-n) = (r-n)+n = r$.
Donc Φ est surjective de $E_n \oplus E_m \to E_{n+m}$.
Puis si $\Phi(a,i) = \Phi(b,j) = r$, alors
— si $r \leqslant n$, nécessairement $a = b = 1$, puis $i = r = j$ et donc $(a,i) = (b,j)$
— si $r > n$, nécessairement $a = b = 2$, puis $i = r - n = j$ et donc $(a,i) = (b,j)$
Par conséquent Φ est injective.

/2

$$\boxed{\Phi \text{ est bijective et } \Phi^{-1}(r) = \begin{cases} (1,r) & \text{si } r \leqslant n \\ (2, n-r) & \text{si } r > n \end{cases}}$$

Remarques !
On aurait également pu exploiter les cardinaux

(b) On a vu que, par définition : $\epsilon(\sigma+\tau) = \epsilon(\Phi \circ (\sigma+\tau) \circ \Phi^{-1})$.
(**attention** : ici Φ est définie à l'envers, par rapport à φ).
Supposons que $\sigma = \prod_{i=1}^{S} s_i$ et $\tau = \prod_{j=1}^{T} t_j$, produit de transposition de S_n et S_m respectivement.
Alors, pour tout $r \in E_{n+m}$

$$\begin{array}{lll} r \leqslant n & \Rightarrow & \Phi \circ (\sigma+\tau) \circ \Phi^{-1}(r) = \Phi \circ (\sigma+\tau)(1,r) = \Phi(1, \sigma(r)) = \sigma(r) \\ r > n & \Rightarrow & \Phi \circ (\sigma+\tau) \circ \Phi^{-1}(r) = \Phi \circ (\sigma+\tau)(2, r-n) = \Phi(2, \tau(r-n)) = n + \tau(r-n) \end{array}$$

Ainsi, on notant :
— pour tout $s_i = (a \ \ b) \in S_n$, $\overline{s_i}$, la permutation de S_{n+m} définie par $(a \ \ b)$
— pour tout $t_j = (c \ \ d) \in S_m$, $\overline{t_j}$, la permutation de S_{n+m} définie par $(c+n \ \ d+n)$
on a $\Phi \circ (\sigma+\tau) \circ \Phi^{-1} = \prod_{i=1}^{S} \overline{s_i} \prod_{j=1}^{T} \overline{t_j}$ et donc

/2,5

$$\boxed{\epsilon(\sigma+\tau) = \epsilon(\Phi \circ (\sigma+\tau) \circ \Phi^{-1}) = (-1)^{S+T} = (-1)^S(-1)^T = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)}$$

4. On note $\text{inv}_{n,m} : E_n \times E_m \to E_n \times E_m$ la permutation qui consiste à passer de l'ordre lexico-graphique de gauche à droite à l'ordre lexico-graphique de droite à gauche.
Ainsi pour $n = 2, m = 3$, on a

$$\text{inv}_{2,3} = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) & (1,3) & (2,3) \end{pmatrix}$$

(a) On peut remarquer que $\text{inv}_{2,3}$ est le cycle : $\big((1,2) \ \ (2,1) \ \ (2,2) \ \ (1,3)\big)$.

/1

$$\boxed{\text{Donc la signature de } \text{inv}_{2,3} \text{ est } \epsilon(\text{inv}_{2,3}) = (-1)^3 = -1}$$

(b) On a

$$\boxed{\mathrm{inv}_{4,3} = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (4,1) & (4,2) & (4,3) \\ (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) \end{pmatrix}}$$

Puis, on note que $\mathrm{inv}_{4,3}$ est le produit de cycles :

$$\mathrm{inv}_{4,3} = \big((1,2)\ (2,1)\ (4,1)\ (2,3)\ (2,2)\big) \circ \big((1,3)\ (3,1)\ (3,2)\ (4,2)\ (3,3)\big)$$

$$\boxed{\epsilon(\mathrm{inv}_{4,3}) = (-1)^{4+4} = 1}$$ */1,5*

(c) Soient $n, m \in \mathbb{N}$.
Pour calculer $\epsilon(\mathrm{inv}_{n,m})$, on compte le nombre d'interversion de couples (3ème formule).
Un couple (i,j) est intervertit avec un couple (i',j')
si et seulement si $\{[i < i'$ ou $(i = i'$ et $j < j')]$ et $[j > j'$ ou $(j = j'$ et $i > i')]\}$ ou l'inverse.
si et seulement si $[i < i'$ et $j > j']$ ou $[i > i'$ et $j < j']$.
(car on ne peut avoir à la fois $j < j'$ et $(j > j'$ ou $j = j')$) Or étant donné deux nombres i et i', nécessairement l'un est plus grand que l'autre.
Donc pour toute paire $\{i, i\prime\}$ et toute paire $\{j, j\prime\}$ choisie à partir de E_n et E_m,
il existe une et une seule paire de couples intervertit : $(\min(i,i'), \max(j,j'))$ avec $(\max(i,i'), \min(j,j'))$.
Il y a alors autant de couples intervertit que de couple de paire de E_n et E_m,
c'est-à-dire : $\binom{n}{2} \times \binom{m}{2}$ choix possibles.
Ainsi : $\mathrm{inv}_{n,m}$ est le produits de $\binom{n}{2} \times \binom{m}{2}$ interversions et donc

/2,5

$$\boxed{\epsilon(\mathrm{inv}_{n,m}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}\frac{m(m-1)}{2}}}$$

Remarques !
On peut vérifier que $\epsilon(\mathrm{inv}_{4,3}) = 1 = (-1)^{\frac{4\times 3}{2}\frac{3\times 2}{2}} = (-1)^{18}$ *et* $\epsilon(\mathrm{inv}_{2,3}) = -1 = (-1)^{\frac{2\times 1}{2}\frac{3\times 2}{2}} = (-1)^3$

5. Pour la suite de l'exercice, on suppose que n est un nombre premier impair.
On considère m non divisible par n, donc $m \wedge n = 1$ et $v_m : \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \mapsto \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{h} \mapsto \overline{m \times h}$ (modulo n).

(a) v_m est injective :

$$v_m(i) = v_m(j) \Leftrightarrow mi \equiv mj[n] \Leftrightarrow n | m(i-j) \Leftrightarrow n | i-j$$

car n est premier. Et comme $i - j \in]\!] -n, n [\![$, alors $i - j = 0$ et donc $i = j$. Comme les ensembles de départ et d'arrivée sont les mêmes et sont de cardinaux finis,

/1

$$\boxed{v_m \text{ est une bijection de } \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}.}$$

On aurait pu également montrer la surjection avec le théorème de Bézout. On note $\left(\frac{m}{n}\right) = \epsilon(v_m)$, et on l'appelle cette notation le symbole de Zolotarev.

(b) Notons que si $n \wedge m = 1$ et $n \wedge m' = 1$, alors $n \wedge mm' = 1$.
Puis $v_{mm'}(\overline{h}) = \overline{mm'h} = v_m(\overline{m'h}) = v_m \circ v_{m'}(\overline{h})$.
Ainsi

$$\boxed{\text{pour tout } m, m',\ \left(\frac{mm'}{n}\right) = \epsilon(v_m v_{m'}) = \epsilon(v_m)\epsilon(v_{m'}) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m'}{n}\right)}$$ */1,5*

(c) v_m est une permutation de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.
On note p l'ordre de 1 dans v_m, c'est-à-dire que c'est la longueur de l'orbite de 1,
ou encore $v_m^p(1) = 1$ et $v_m^k(1) \neq 1$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.

/1

$$\boxed{\text{On a alors } m^p \equiv 1[n] \text{ et } m^k \not\equiv 1[n] \text{ pour tout } k \in [\![1, p-1]\!].}$$

(d) Remarquons que $v_m(n) = \overline{mn} = n[n]$.
Donc $\overline{n}$ est un point fixe de v_m.
Puis si $\overline{j} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ (avec $j \neq n$) n'est pas dans l'orbite de 1 alors l'orbite de $\overline{j}$ est

$$(\overline{j}\ \ \overline{mj}\ \ \overline{m^2 j} \dots\ \ \overline{m^{p-1}j})$$

En effet : $m^p j \equiv j[n]$ alors que $m^k j \equiv m^h j[n] \Rightarrow n | j(m^k - m^h) \Rightarrow n | m^k - m^h \Rightarrow m^k = m^h$.
ce qui est impossible car $m^k \neq m^h$ (compte-tenu de l'orbite de 1).

Ainsi v_m se décompose en 1 point fixe et r cycles, tous de longueur p.
Par conséquent : $1+rp=n$ ou encore $rp=n-1$, donc $p|n-1$.

$$\boxed{v_m \text{ se décompose en } \frac{n-1}{p} \text{ cycles de longueur } p \text{ et un point fixe}}$$ /1,5

Puis

$$\boxed{m^{n-1} \equiv m^{pr} \equiv (m^p)^r \equiv 1^r = 1[n], \text{ c'est le petit théorème de Fermat.}}$$ /0,5

(e) D'après la question précédente (et avec les mêmes notations) : $\epsilon(v_m) = (-1)^{\frac{n-1}{p}(p-1)}$.
Deux cas :
— si p est pair.
$m^{\frac{n-1}{2}} = m^{\frac{p}{2}\frac{n-1}{p}} = \left(m^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{n-1}{p}}$.
Or $m^p \equiv 1[n]$, donc $(m^{\frac{p}{2}}-1)(m^{\frac{p}{2}}+1) \equiv 0[n]$ i.e. $m^{\frac{p}{2}} \equiv 1$ ou $-1[n]$.
Or $m^{\frac{p}{2}} \neq 1$, sinon l'ordre de m serait p. Donc $m^{\frac{p}{2}} \equiv -1[n]$.
Par conséquent : $m^{\frac{n-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{n-1}{p}} = \left((-1)^{p-1}\right)^{\frac{n-1}{p}}$ car $p-1$ est impair.
Donc $m^{\frac{n-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{n-1}{p}(p-1)} \equiv \epsilon(v_m)\ [n]$ si p est pair.
— si p est impair.
On sait que $p|n-1$, donc $p|\frac{n-1}{2}\times 2$ ($n-1$ est pair).
Or $p\wedge 2=1$, donc (lemme de Gauss) : $p|\frac{n-1}{2}$ et donc $\frac{n-1}{p} = 2\times h$ avec $h=\frac{n-1}{2p}\in\mathbb{N}$.
Donc $\epsilon(v_m) = (-1)^{\frac{n-1}{p}(p-1)} = (-1)^{2h(p-1)} = 1$.
Alors que $m^{\frac{n-1}{2}} = m^{ph} = (m^p)^h \equiv 1^h = 1[n]$.
Donc $m^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \equiv \epsilon(v_m)\ [n]$ si p est impair.
Dans tous les cas

$$\boxed{\left(\frac{m}{n}\right) \equiv m^{\frac{n-1}{2}} \quad [n]}$$ /3

(f) Pour tout $m\in\{1,\dots n-1\}$, $m^{n-1}\equiv 1[n]$.
Donc tous ces nombres sont des racines du polynômes $X^{n-1}-1$ (sur le corps $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$).
Ainsi, ce polynôme de degré $n-1$ se factorise en $X^{n-1}-1 \equiv \prod_{k=1}^{n-1}(X-k)\ [n]$ Mais par ailleurs, $n-1$ est un nombre pair, donc $X^{n-1}-1 = (X^{\frac{n-1}{2}}-1)(X^{\frac{n-1}{2}}+1) \equiv \prod_{k=1}^{n-1}(X-k)$.
Ainsi, pour des raisons de degré (un polynôme ne peut admettre plus de racines que son degré),
$G_1 = \{k \mid k^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1[n]\}$ et $G_2 = \{k \mid k^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1[n]\}$ sont de même cardinaux : $\frac{n-1}{2}$.
Notons H_1, l'ensemble $\left\{m^2, m\in\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right\}$, ensemble des résidu quadratique modulo n.
Si $x\in H_1$, alors il existe a tel que $x\equiv a^2[n]$ et donc $x^{\frac{n-1}{2}} \equiv a^{n-1}\equiv 1[n]$ et donc $x\in G_1$.
Par ailleurs, k et $n-k$ ont même carré : $(n-k)^2 = n^2-2nk+k^2 \equiv k^2[n]$,
mais si $k,h\in\{1,\dots\frac{n-1}{2}\}$, : $k^2\equiv h^2[n] \Rightarrow n|(k-h)(k+h) \Rightarrow k\equiv h[n]$ car $k+h\in \{2,\dots\frac{n-1}{\}}$.
Donc H_1 possède au moins $\frac{n-1}{2}$ éléments distincts et $H_1\subset G_1$.
Alors H_1 ne peut pas posséder plus de $\frac{n-1}{2}$ éléments distincts et finalement $H_1=G_1$.
Et donc par complémentarité : $G_2 = \complement_{\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}}(G_1) = \complement_{\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}}(H_1)$ ensemble des non résidus quadratiques.
En conclusion :

$$\boxed{\left(\frac{m}{n}\right) \equiv m^{\frac{n-1}{2}} \quad [n] = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ est un résidu quadratique modulo } n \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}}$$ /3

Problème. Compléter la suite logique : 1, 2, 16, 272...

A. Interprétation combinatoire et algorithme

Dans cette partie on considère un entier $n\in\mathbb{N}^*$ puis $m=2n+1$. Par convention, on choisit $T_0=1$.

1. Quelques cas particuliers
(a) Les permutation de S_3 sont :
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$.
Seules la troisième et la quatrième permutations sont alternantes.

$$\boxed{\text{Donc } T_1 = 2.}$$ /1

(b) Ecrire les $5! = 120$ permutations de S_5 est trop long. Nous devons faire autrement.
Soit σ une permutation alternante.
Nécessairement 5 occupe la deuxième ou quatrième place,
car la première, troisième et cinquième place ont des voisins supérieur.
Donc $\sigma^{-1}(5) \in \{2, 4\}$.
A contrario, $\sigma(1)$ occupe la première, troisième et cinquième place.
Donc $\sigma^{-1}(1) \in \{1, 3, 5\}$.

— Il y 2 permutations alternantes avec $\sigma^{-1}(1) = 1$ et $\sigma^{-1}(5) = 2$, car $\sigma^{-1}(4) = 4$:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

— Il y 3 permutations alternantes avec $\sigma^{-1}(1) = 3$ et $\sigma^{-1}(5) = 2$, selon $\sigma(1)$:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

— Il y 3 permutations alternantes avec $\sigma^{-1}(1) = 5$ et $\sigma^{-1}(5) = 2$, selon $\sigma(1)$:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

— Il y 3 permutations alternantes avec $\sigma^{-1}(1) = 1$ et $\sigma^{-1}(5) = 4$, selon $\sigma(5)$:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

— Il y 3 permutations alternantes avec $\sigma^{-1}(1) = 3$ et $\sigma^{-1}(5) = 4$, selon $\sigma(5)$:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

— Il y 2 permutations alternantes avec $\sigma^{-1}(1) = 5$ et $\sigma^{-1}(5) = 2$, car $\sigma^{-1}(4) = 4$:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Tous les cas sont énumérés et une seule fois :

/1,5

$$\boxed{T_2 = 16}$$

2. Relation de récurrence.

(a) On considère une permutation alternante de S_m.

- Le nombre $m = 2n + 1$ est le plus grand de tous les nombres, il se trouve nécessairement sur une position maximale c'est à une dire une position paire. *1,5*
Donc il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\sigma(2k+2) = 2n+1$ ($2n+1$ est en position $2k+2$).
- Les $2k+1$ nombres placés à sa gauche forme alors une suite alternante.
Quitte à identifier les nombres de cette suite à leur valeurs ordinales, on trouve alors une permutation alternante de $2k+1$ nombres.
- De même, les $(2n+1) - (2k+1) - 1 = 2(n-k-1) + 1$ nombres placés à sa droite forme alors une suite alternante.
Quitte à identifier les nombres de cette suite à leur valeurs ordinales, on trouve alors une permutation alternante de $2(n-k-1)+1$ nombres.

(b) En suivant la décomposition de la question précédente, et en tenant compte du fait qu'il faut extraire un sous-ensemble de $2k+1$ éléments à partir de l'ensemble à $2n$ éléments pour choisir les nombres à gauche de $2n+1$, on trouve :

/1,5

$$\boxed{T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} T_k \times T_{n-k-1}}$$

(c) Avec $n = 2$

$$T_2 = \sum_{k=0}^{1} \binom{4}{2k+1} T_k T_{1-k} = \binom{4}{1} T_0 T_1 + \binom{4}{3} T_1 T_0 = 4 \times 2 + 4 \times 2 = 16$$

Puis, pour $n = 3$:

$$\begin{aligned} T_3 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{6}{2k+1} T_k T_{2-k} = \binom{6}{1} T_0 T_2 + \binom{6}{3} T_1 T_1 + \binom{6}{5} T_2 T_1 \\ &= 6 \times 16 + 20 \times 2^2 + 6 \times 16 = 12 \times 16 + 80 = 196 + 80 = 272 \end{aligned}$$

$$\boxed{T_2 = 16 \qquad \text{et} \qquad T_3 = 272}$$ */1*

3. Triangle d'Euler-Bernoulli (de Kempner ?). Construction

(a) On applique l'algorithme et on obtient /1

ℓ_0								1							
ℓ_1							1		0						
ℓ_2						0		1		1					
ℓ_3					2		2		1		0				
ℓ_4				0		2		4		5		5			
ℓ_5			16		16		14		10		5		0		
ℓ_6		0		16		32		46		56		61		61	
ℓ_7	272		272		256		242		178		122		61		0

(b) Pour $k, r \in \mathbb{N}$, avec $0 \leqslant k \leqslant r$, on note $\left\langle \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\rangle$, le $(k+1)^{\text{e}}$nombre obtenu en ligne ℓ_r. /0,5

$$\boxed{\text{On remarque, expérimentalement que } T_0 = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle,\ T_1 = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle,\ T_2 = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \text{ et } T_3 = \left\langle \begin{matrix} 7 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle}$$

(c) On étudie selon la parité de r :

— Dans le cas où $r+1$ est pair (donc r impair) :

$$\left\langle \begin{matrix} r+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} r+1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\rangle$$

— Dans le cas où $r+1$ est impair (donc r pair) :

$$\left\langle \begin{matrix} r+1 \\ k \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} r+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\rangle \text{ donc } \left\langle \begin{matrix} r+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} r+1 \\ k \end{matrix} \right\rangle - \left\langle \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\rangle$$

On peut donc fusionner ces relations en une seule : /1

$$\boxed{\left\langle \begin{matrix} r+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} r+1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + (-1)^{r+1} \left\langle \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\rangle}$$

(d) On note $P_{r,k}$, le nombre de permutation alternantes de S_r telle que $\sigma(r) = k$.
Attention, dans ce cas, r peut être pair ou impair !
T_n est indépendant du nombre $\sigma(2n+1)$, qui peut être égal à tout nombre entier de 1 à $2n+1$ /1

$$\boxed{T_n = \sum_{k=1}^{2n+1} P_{2n+1,k}}$$

(e) On suppose que r est pair. Alors $\sigma(r) > \sigma(r-1)$, car on termine par une montée. Donc nécessairement, $\sigma(r) > 1$. /0,5

$$\boxed{P_{r,1} = 0}$$

Notons qu'elle termine par une montée donc $\sigma(r-1) < k+1$.

— Si $\sigma(r-1) < k$ Dans ce cas, si l'on permute k et $k+1$ après σ, on retrouve une permutation alternante qui se termine par k.
C'est-à-dire : $\tau_{k,k+1} \circ \sigma$ est une permutation alternante avec $\sigma(r) = k$.
Donc $\operatorname{card}\left(\{\sigma \text{ alternante } \mid \sigma(r) = k+1, \sigma(r-1) < k\}\right) = P_{r,k}$

— Si $\sigma(r-1) = k$. Dans ce cas, la permutation se termine en $(\dots k\ \ k+1)$.
On peut alors considérer σ' définie sur E_{r-1} par :
$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } \sigma(i) \leqslant k \\ \sigma(i) - 1 & \text{si } \sigma(i) > k \end{cases}$$
L'application $\sigma \mapsto \sigma'$ est bijective de $\{\sigma \in S_r \text{ alternante } \mid \sigma(r) = k+1, \sigma(r-1) = k\}$ sur $\{\sigma' \in s_{r-1} \text{ alternante } \mid \sigma'(r-1) = k\}$.
Donc $\operatorname{card}\left(\{\sigma \text{ alternante } \mid \sigma(r) = k+1, \sigma(r-1) = k\}\right) = P_{r-1,k}$

On a procédé par disjonction complète de cas : /1,5

$$\boxed{P_{r,k+1} = P_{r,k} + P_{r-1,k}}$$

Remarques !

Pour bien comprendre l'application $\sigma \mapsto \sigma'$, on peut prendre un cas particulier avec $r = 6$ et $k = 4$.
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, *on a alors* $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(f) On suppose que r est impair. Alors $\sigma(r) < \sigma(r-1)$, car on termine par une descente. Donc nécessairement, $\sigma(r) < r$.

$$\boxed{P_{r,r} = 0}$$ */0,5*

Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Considérons une permutation alternante σ telle que $\sigma(r) = k+1$.
Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Considérons une permutation alternante σ telle que $\sigma(r) = k$.
Notons qu'elle termine par une descente donc $\sigma(r-1) > k+1$.

— Si $\sigma(r-1) > k+1$ Dans ce cas, si l'on permute k et $k+1$ après σ, on retrouve une permutation alternante qui se termine par k.
C'est-à-dire : $\tau_{k,k+1} \circ \sigma$ est une permutation alternante avec $\sigma(r) = k+1$.
Donc $\operatorname{card}(\{\sigma \text{ alternante } \mid \sigma(r) = k, \sigma(r-1) > k+1\}) = P_{r,k+1}$

— Si $\sigma(r-1) = k+1$. Dans ce cas, la permutation se termine en $(\dots k+1 \ \ k)$.
On peut alors considérer σ' définie sur E_{r-1} par :
$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } \sigma(i) < k \\ \sigma(i) - 1 & \text{si } \sigma(i) \geqslant k \end{cases}$$
L'application $\sigma \mapsto \sigma'$ est bijective de $\{\sigma \in S_r \text{ alternante } \mid \sigma(r) = k, \sigma(r-1) = k+1\}$ sur $\{\sigma' \in s_{r-1} \text{ alternante } \mid \sigma'(r-1) = k\}$.
Donc $\operatorname{card}(\{\sigma \text{ alternante } \mid \sigma(r) = k, \sigma(r-1) = k+1\}) = P_{r-1,k}$

On a procédé par disjonction complète de cas :

$$\boxed{P_{r,k} = P_{r,k+1} + P_{r-1,k}}$$ */1,5*

(g) On a trouvé aux questions précédentes que $P_{r,k+1} = P_{r,k} + (-1)^r P_{r-1,k}$, soit la même relation que pour les coefficients $\left\langle \begin{matrix} r-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle$.

Mais, le premier coefficient s'écrit $\left\langle \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle$, alors qu'il s'agit du nombre $P_{1,1}$.
Enfin, les coefficients nuls sont situés de « l'autre côté ».
On peut supposer que pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant r$: $P_{r,k} = \left\langle \begin{matrix} r-1 \\ r-k \end{matrix} \right\rangle$.

Posons, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{P}_k$: « $\forall\, k \in [\![1, r]\!]$, $P_{r,k} = \left\langle \begin{matrix} r-1 \\ r-k \end{matrix} \right\rangle$ »

— On a vu que $P_{1,1} = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} 1-1 \\ 1-1 \end{matrix} \right\rangle$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_r$ est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
On a vu que $\left\langle \begin{matrix} r+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} r+1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + (-1)^r \left\langle \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\rangle$ et $P_{r,k+1} = P_{r,k} + (-1)^r P_{r-1,k}$

• Supposons que r soit impair, donc $r+1$ est pair. Par construction
$$\left\langle \begin{matrix} r \\ r \end{matrix} \right\rangle = 0 = P_{r+1,1}$$
et pour $k > 1$:
$$P_{r+1,k} = P_{r+1,k} - P_{r+1,1} = \sum_{h=1}^{k-1} P_{r+1,h+1} - P_{r+1,h} = \sum_{h=1}^{k-1} P_{r,h} = \sum_{h=1}^{k-1} \left\langle \begin{matrix} r-1 \\ r-h \end{matrix} \right\rangle$$
d'après l'hypothèse de récurrence. Puis comme r est impair :
$$P_{r+1,k} = \sum_{h=1}^{k-1} \left(-\left\langle \begin{matrix} r \\ r-h+1 \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} r \\ r-h \end{matrix} \right\rangle \right) = -\left\langle \begin{matrix} r \\ r \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} r \\ r-k+1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} r \\ r-k+1 \end{matrix} \right\rangle$$

• Supposons que r soit pair, donc $r+1$ est impair. Par construction $\left\langle \begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 0 = P_{r+1,r+1}$
et pour $k > 1$:
$$P_{r+1,k} = P_{r+1,k} - P_{r+1,r+1} = \sum_{h=k}^{r} P_{r+1,h} - P_{r+1,h+1} = \sum_{h=k}^{r-1} P_{r,h} = \sum_{h=k}^{r-1} \left\langle \begin{matrix} r-1 \\ r-h \end{matrix} \right\rangle$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Puis comme $(r-1)+1$ est pair :

$$P_{r+1,k} = \sum_{h=k}^{r-1} \left(-\left\langle \begin{array}{c} r \\ r-h \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{c} r \\ r-h+1 \end{array} \right\rangle \right) = -\left\langle \begin{array}{c} r \\ r-r \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{c} r \\ r-k+1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} r \\ r-k+1 \end{array} \right\rangle$$

Dans tous les cas (k pair ou impair), on trouve donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi

$$\boxed{\forall\, r \in \mathbb{N}^*, k \leqslant r, \qquad P_{r,k} = \left\langle \begin{array}{c} r-1 \\ r-k \end{array} \right\rangle}$$ /3

(h) On a vu que $T_n = \sum_{k=1}^{2n+1} P_{2n+1,k}$ Donc

$$T_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \left\langle \begin{array}{c} 2n \\ 2n+1-k \end{array} \right\rangle = \sum_{k=1}^{2n+1} \left(-\left\langle \begin{array}{c} 2n+1 \\ 2n+2-k \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{c} 2n+1 \\ 2n+1-k \end{array} \right\rangle \right) = \left\langle \begin{array}{c} 2n+1 \\ 0 \end{array} \right\rangle - \left\langle \begin{array}{c} 2n+1 \\ 2n+1 \end{array} \right\rangle$$

Et comme $\left\langle \begin{array}{c} 2n+1 \\ 2n+1 \end{array} \right\rangle = 0$ /2

$$\boxed{T_n = \left\langle \begin{array}{c} 2n+1 \\ 0 \end{array} \right\rangle}$$

B. Série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{T_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

1. Le polynôme P_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T_k}{(2k)!} x^{2k}$

   Alors que, par produit de Cauchy, avec $r = k+h \Leftrightarrow h = r-k$,

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R} \quad P_n^2(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{T_k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \sum_{h=0}^{n} \frac{T_h}{(2h+1)!} x^{2h+1} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{n} \frac{T_k T_h}{(2k+1)!(2h+1)!} x^{2(k+h)+2} \\ &= \sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{T_k T_{r-k}}{(2k+1)!(2(r-k)+1)!} \right) x^{2r+2} + \sum_{r=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=r-n}^{n} \frac{T_k T_{r-k}}{(2k+1)!(2(r-k)+1)!} \right) x^{2r+2} \end{aligned}$$

   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} T_k \times T_{n-k-1}$, donc avec $n = r+1$:

$$T_{r+1} = \sum_{k=0}^{r} \binom{2r+2}{2k+1} T_k \times T_{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \frac{(2r+2)!}{(2k+1)!(2(r-k)+1)!} T_k \times T_{r-k}$$

   Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{T_k \times T_{r-k}}{(2k+1)!(2(r-k)+1)!} = \frac{T_{r+1}}{(2r+2)!}$$

   Par conséquent avec $k = r+1$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, P_n^2(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{T_{r+1}}{(2r+2)!} x^{2r+2} + \sum_{r=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=r-n}^{n} \frac{T_k T_{r-k}}{(2k+1)!(2(r-k)+1)!} \right) x^{2r+2}$$

   Puis, comme $T_k > 0$, $x^{2r+2} = (x^{r+1})^2 > 0$, on a donc /2,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall\, x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) \leqslant 1 + P_n^2(x) \leqslant P_{2n+1}'(x)}$$

2. On fait une récurrence forte. Posons $\mathcal{P}_n$: « $0 \leqslant T_n \leqslant (2n+1)!$ ».
   - $\mathcal{P}_0$ est vraie : $T_0 = 1 = 1! = (2 \times 0 + 1)!$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \leqslant n$, $\mathcal{P}_k$ est vraie.

     On rappelle que $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+2}{2k+1} T_k \times T_{n-k}$.

     Puisque $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \leqslant n$:

$$0 \leqslant \binom{2n+2}{2k+1} T_k \times T_{n-k} \leqslant \frac{(2n+2)!}{(2k+1)!(2(n-k)+1)!} (2k+1)!(2(n-k)+1)! = (2n+2)!$$

$$0 \leqslant T_{n+1} \leqslant n \times (2n+2)! \leqslant (2n+3)(2n+2)! = (2(n+1)+1)!$$

     Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant T_n \leqslant (2n+1)!.}$$ */1,5*

3. Soit $\rho \in]-1,1[$ et $u_n = \frac{T_n}{(2n+1)!}\rho^{2n+1}$.
   D'après la question précédente :

$$|u_n| \leqslant |\rho|^{2n+1} = |\rho| \times (\rho^2)^n$$

   Or la série, $\sum_{n \geqslant 0} |\rho|^{2n+1}$ est géométrique de raison ρ^2. Elle converge car $0 < \rho^2 < 1$.
   Ainsi, par comparaison de série à termes positifs, la série de terme général $|u_n|$ converge.
   Donc la série de terme général u_n converge absolument, donc converge.

/1,5

$$\boxed{\text{Pour tout } \rho \in]-1,1[, \text{ la série } \sum_{n \geqslant 0} \frac{T_n}{(2n+1)!}\rho^{2n+1} \text{ est convergente.}}$$

   On note $T(\rho)$ sa limite.

4. $T(0)$ est une somme de termes tous nuls, donc

/0,5

$$\boxed{T(0) = 0}$$

5. On exploite ici le résultat annoncé en tête de problème.
   Soit $x_0 \in]-1,1[$ et $\epsilon > 0$ tel que $]-|x_0|-\epsilon, |x_0|+\epsilon[\subset]-1,1[$.
   Cela est possible avec $\epsilon = \frac{1-|x_0|}{2}$.
   Alors, en considérant $a_n = \frac{T_n}{(2n+1)!} > 0$ et $\rho = |x_0| + \epsilon$, on peut appliquer le résultat admis dans l'énoncé.
   Et donc T est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[$;
   ceci est vrai pour tout $x_0 < 1$, donc

/1

$$\boxed{T \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-1,1[}$$

   Et l'on a

$$\forall\, x \in]-1,1[, \qquad T'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{(2n)!}x^{2n} \qquad \text{et} \qquad \lim_{m \to +\infty} P'_{2m+1}(x) = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + P_m^2(x)\right) = 1 + T^2(x)$$

   Ainsi, par passage à limite sur l'encadrement obtenue en question (2) : */2*

$$\boxed{\forall\, x \in]-1,1[, \qquad T'(x) = 1 + T^2(x)}$$

6.

Remarques !
L'équation n'est pas linéaire, on ne peut donc pas utiliser ici l'unicité du problème de Cauchy.
Heureusement, on reconnait une formule assez classique, avec la réciproque de tan...

   Soit $\Phi = \arctan \circ T$.
   Par composition, Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_T (\supset]-1,1[)$,

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_T, \qquad \Phi'(x) = T' \arctan'(T) = \frac{T'}{1+T^2} = 1$$

   On peut intégrer :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) = x + \Phi(0) = x$$

   car $\Phi(0) = \arctan(T(0)) = \arctan(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Par conséquent, } \forall\, x \in \mathcal{D}_T,\ T = \tan(x)}$$

   On a donc

/3

$$\boxed{\forall\, x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \tan x}$$

Remarques !

Dans le cours, le DL (ou le développement en série entière) de tan *en* 0 *est compliqué à retenir.*
Avec ces deux parties, on a mis au point un algorithme pour l'obtenir.
D'abord on calcule le triangle d'Euler-Bernoulli, puis on utilise la formule $\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

C. Calcul (originale) de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$

1. Convergence.
   Il s'agit d'un résultat du cours :

   /1

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge (s)si } \alpha > 0. \text{ Donc } \zeta \text{ est bien définie sur }]1, +\infty[}$$

2. Expression de $\zeta(2s)$ en fonction de T_n

   (a) On note $I(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^s}$.

   Comme les séries sont à termes généraux <u>positifs</u> et <u>convergentes</u> :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^s} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^s} = \frac{1}{2^s}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^s} = \frac{1}{2^s}\zeta(s) + I(s)$$

   Donc $\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = I(s)$

   /1

$$\boxed{I(s) = \frac{2^s - 1}{2^s}\zeta(s)}$$

   (b) La formule énoncée se base sur le fait que :
   — tan est une fraction rationnelle de degré $-\infty$ (sans être nulle) !
   — Ses pôles sont données lorsque tan est infini :

$$\tan(x) = \infty \Longleftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{N}, x = \pm\frac{(2k+1)}{2}\pi$$

   — La fonction tan peut alors se décomposer en éléments simples :

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{a_k}{x - \frac{(2k+1)}{2}\pi} + \frac{a_{-k}}{x + \frac{(2k+1)}{2}\pi}\right)$$

   avec $a_k = \lim_{x \to \frac{(2k+1)}{2}\pi} \tan(x) \times (x - \frac{(2k+1)}{2}\pi) = \lim_{y \to 0} \frac{(-1)^k y}{\tan(y)} = -1$

   en posant $y = x - \frac{(2k+1)}{2}\pi$ et donc $\tan(x) = \tan(y + \frac{(2k+1)}{2}\pi) = \dfrac{-1}{\tan(y)}$

   — Donc

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)\left(\frac{1}{x - \frac{(2k+1)}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{(2k+1)}{2}\pi}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)\left(\frac{2}{2x - (2k+1)\pi} + \frac{2}{2x + (2k+1)\pi}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2}$$

   Ainsi, on comprend bien pourquoi, si il existe une telle formule cela ne peut être que celle-ci :

   /3

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}, \tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2}}$$

   (c) En factorisant par $(2k+1)^2\pi^2$,

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \tan(x) = 8x\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}} = 8x\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2\pi^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{2x}{(2k+1)\pi}\right)^2}$$

Et donc pour $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\left(\dfrac{2x}{(2k+1)\pi}\right)^2 < 1$, pour tout $k \geqslant 0$, ainsi

$$\frac{1}{1-\left(\frac{2x}{(2k+1)\pi}\right)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2x}{(2k+1)\pi}\right)^{2n}$$

Et donc

$$\boxed{\forall\ x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \qquad \tan(x) = 8x\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2x}{(2k+1)\pi}\right)^{2n}\right)}$$

/1,5

(d) En admettant que dans ce cas la permutation des sommes infinies :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2x}{(2k+1)\pi}\right)^{2n}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2}\left(\frac{2x}{(2k+1)\pi}\right)^{2n}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2n+2}}\right)\frac{2^{2n}}{\pi^{2n+2}}x^{2n}\end{aligned}$$

Remarques !

Il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ qu'il existe $A \subset N^2$, fini tel que

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,k} - \sum_{(k,n)\in A}a_{n,k}\right| < \epsilon$$

Donc, comme $I(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^s}$

$$\forall\ x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \qquad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 8\times I(2n+2)\times\frac{2^{2n}}{\pi^{2n+2}}x^{2n+1}$$

$$\boxed{\forall\ x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \qquad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\times(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2)\times\frac{1}{\pi^{2n+2}}x^{2n+1}}$$

/1,5

(e) On sait que les applications $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2)}{\pi^{2n+2}}x^{2n+1}$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T_n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}[$ et $]-1,1[$ (au moins) respectivement.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tan^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!\frac{2(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2)}{\pi^{2n+2}} = T_n$$

(Il y a donc unicité d'écriture.) On peut affirmer :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)!\dfrac{2(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2)}{\pi^{2n+2}} = T_n$.

/2

$$\boxed{\zeta(2n+2) = \frac{T_n\times\pi^{2n+2}}{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}}$$

(f) Et donc pour $n=0$, $n=1$, $n=2$ et $n=3$, comme $T_0 = 1$, $T_1 = 2$, $T_2 = 16$ et $T_3 = 272$:

/2

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9\,450}}$$

3. Vitesse de convergence

(a) Soit $s > 1$. (Comme dans le cours)

$$\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}} = \frac{1}{n^{s-1}}\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-s}\right) = \frac{1}{n^{s-1}}\left(-(1-s)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}} = \frac{s-1}{n^s}+o\left(\frac{1}{n^s}\right)}$$

/1

(b) On a donc

$$\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}} \sim_{n\to+\infty} \frac{s-1}{n^s}$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$(1-\epsilon) \leqslant \frac{\dfrac{1}{n^{s-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{s-1}}}{\dfrac{s-1}{n^s}} \leqslant (1+\epsilon)$$

Comme les termes sont positifs :

$$(1-\epsilon)\frac{s-1}{n^s} \leqslant \frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}} \leqslant (1+\epsilon)\frac{s-1}{n^s}$$

$$\boxed{\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N, (1-\epsilon)\frac{s-1}{n^s} \leqslant \frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}} \leqslant (1+\epsilon)\frac{s-1}{n^s}}$$

/1,5

(c) Si on somme la relation précédente entre $m \geqslant N$ et $+\infty$ (les séries sont convergentes)

$$(1-\epsilon)\frac{s-1}{n^s} \leqslant \sum_{n=m}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}}\right) \leqslant (1+\epsilon)\frac{s-1}{n^s}$$

Et donc par télescopage et division par $s-1>0$:

$$(1-\epsilon)\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^s} \leqslant \frac{1}{(s-1)m^{s-1}} \leqslant (1+\epsilon)\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\forall\ m \geqslant 0$,

$$\left|\frac{\dfrac{1}{(s-1)m^{s-1}}}{\displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^s}} - 1\right| \leqslant \epsilon$$

$$\boxed{\text{Cela signifie exactement que} \qquad \zeta(s) - \sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^s} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(s-1)m^{s-1}}}$$

/2

4. On va exploiter le calcul précédent, qui nous indique une bonne approximation de la qualité de l'approximation.

A lire : selon l'approximation de $\dfrac{1}{(s-1)m^{s-1}} < \epsilon \iff m > \sqrt[s-1]{\frac{1}{(s-1)\epsilon}}$,

on trouve une valeur de m qui nous assure que la calcul de la somme partielle jusqu'à l'ordre m est une bonne approximation de $\zeta(m)$.

/2

```python
import numpy as np

def approx_zeta(s,epsilon):
    """approximation de zeta(s) à epsilon près"""
    m=np.ceil(np.power(1/(epsilon*(s-1)),1/(s-1)))
    S=0
    for k in range(1,int(m)):
        S+=1/np.power(k,s)
    return(S)
```