Devoir à la maison n°12

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1

(Exercice non obligatoire pour ceux qui n'ambitionnent pas une classe étoilé...)
On reprend ici les notations de l'exercice du DS 8.
• n et m sont deux entiers, impairs, premiers entre eux.
• On note $\text{inv}_{n,m} : E_n \times E_m \to E_n \times E_m$ la permutation qui consiste à passer de l'ordre lexico-graphique de gauche à droite à l'ordre lexico-graphique de droite à gauche.
On a vu dans le DS8 que $\epsilon(\text{inv}_{n,m}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}\frac{m(m-1)}{2}}$.
• On rappelle que m est un dit *résidu quadratique modulo n* si il existe $r \in E_n$ tel que $r^2 \equiv m[n]$.
On sait que :

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \epsilon(v_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ est un résidu quadratique modulo } n \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \equiv m^{\frac{n-1}{2}}[n]$$

où $v_m : \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \mapsto \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, $\overline{h} \mapsto \overline{m \times h}$.

1. On considère $\sigma_1 : \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$, $(i,j) \mapsto (mi+j, j)$.
   (a) On note $\sigma_1^j : \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, $i \mapsto mi+j$.
   Quelle est la signature de σ_1^j (en fonction de $(\frac{m}{n})$) *(on pourra exploiter c_{+j} étudié en DS)*.
   (b) En déduire la signature de σ_1.
2. De même montrer que, pour $\sigma_2 : \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$, $(i,j) \mapsto (i, i+nj)$, $\epsilon(\sigma_2) = \left(\frac{n}{m}\right)$
3. On note $\pi : \dfrac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$, $r \mapsto (r_n, r_m)$ tel que $r \equiv r_n[n]$ et $r \equiv r_m[m]$ (restes dans les divisions euclidiennes par n et m respectivement).
   On considère également $\lambda : \dfrac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}}$, $(mi+j) \mapsto (i+nj)$.
   (a) Montrer que π est bien bijective (on rappelle que $m \wedge n = 1$).
   (b) Comme $n \wedge m = 1$, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $an + bm = 1$.
   Montrer que $\pi^{-1} : (i,j) \mapsto anj + bmi$ (défini modulo nm).
   (c) Montrer que $\lambda \circ \pi^{-1} \circ \sigma_1 = \pi^{-1} \circ \sigma_2$.
   (d) Par ailleurs, quel lien entre λ et $\text{inv}_{m,n}$?
4. En déduire la loi de réciprocité quadratique (« *loi d'or* », selon Gauss) :

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}\frac{m(m-1)}{2}}$$

Exercice 2

Cet exercice a déjà été donné l'année dernière. Evidemment, pour qu'il soit intéressant pour vous il ne faut pas se précipiter sur la correction qui figure sur « le drive »...
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\chi_M(t) = \det(tI_n - M)$$

appelé la fonction caractéristique de M.

1. On note $\mu_p = (-1)^p \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-p}} \det M^{I \wedge I}$ où $M^{I \wedge I}$ est la matrice M auquel on a enlevé les lignes et les colonnes d'indices $i \in I$.
   Calculer μ_1 et μ_n.

2. Montrer que χ est une fonction polynomiale en t, de degré n.
Plus précisément, montrer que
$$\chi_M(t) = t^n + \mu_1 t^{n-1} + \mu_2 t^{n-2} + \cdots + \mu_{n-1} t + \mu_n$$
3. Montrer de la même manière que $L(t) =^t \mathrm{com}(tI_n - M)$ est une fonction polynomiale en t, de degré $n-1$ et à coefficients dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Calculer $L(t) \times (tI_n - M)$, montrer que l'on obtient une matrice colinéaire à I_n. Exprimer ce coefficient de colinéarité en fonction de $\chi_M(t)$.
5. En déduire la relation de Cayley-Hamilton :
$$\chi_M(M) = 0$$

Exercice 3

A toute partie E de $\mathbb{R}$, on associe la fonction caractéristique : $\mathbf{1}_E : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$.

On note $|E| = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, la « mesure »de E.

Enfin, on dit que E est de mesure nulle, si $|E| = 0$.

1. Montrer que si $F \subset E$ et E est de mesure nulle, alors F est de mesure nulle.
2. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|[a,b]| = b - a$.
On démontrerait de même que $|]a,b[| = |]a,b]| = |[a,b[| = b - a$
3. Montrer que si E est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$, alors E est de mesure nulle.

L'exemple de l'ensemble triadique de Cantor montre que la réciproque est fausse.

4. On considère φ définit sur l'ensemble des segments de $\mathbb{R}$, par
$$\varphi([a,b]) = \left[a, \frac{2a+b}{3}\right] \cup \left[\frac{a+2b}{3}, b\right]$$
Notons que $\varphi([a,b]) \subset [a,b]$. On peut donc définir par récurrence :
$$K_0 = [0,1] \qquad \text{si } K_n = \bigcup_{j=1}^{r} [a_j, b_j] \text{union disjointe,} \qquad K_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{r} \varphi([a_j, b_j])$$
On montrerait par récurrence, que K_n est ainsi bien définie : il est la réunion de 2^n segments disjoints.
Enfin, on note $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, l'ensemble triadique de Cantor.
A tout $x \in [0,1]$, on associe les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$a_{n+1} = \lfloor 3^{n+1} x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^n x \rfloor$$
   (a) Montrer que $K_{n+1} \subset K_n$.
   (b) Calculer *(simplement)* $|K_n|$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que K est de mesure nulle.
   (d) Montrer que la suite (a_n) est à valeurs dans $\{0,1,2\}$.
   (e) Montrer que la série de terme général $\frac{a_k}{3^k}$ est convergente.
   On note $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{3^k}$. Montrer que $(x_n) \to x$.
   (f) Montrer que $x \in K$ ssi $\forall\ i \in \mathbb{N}$, $a_n(x) \neq 1$
   (g) Montrer que l'ensemble K n'est pas dénombrable.
   On fera un raisonnement par l'absurde...
5. Escalier du diable