Devoir à la maison n°10
CORRECTION

Exercice

On cherche à dénombrer le nombre de colliers à 10 perles, selon les couleurs des perles. Dans l'ensemble de l'exercice on considérera

— $E = \{x_1, \dots x_{10}\}$ un ensemble à 10 éléments,
— σ la permutation définie par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
— c, le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.
— Si $\ell = (x_{i_1}, \dots x_{i_{10}})$ est une liste d'éléments distincts de E (permutation),
on note, pour toute permutation s de $\mathbb{N}_{10}$: $s \cdot \ell = \ell' = (x_{s(i_1)}, \dots, x_{s(i_{10})})$

1. Dans la réalité, un collier est inchangé
   — s'il est retourné
   — si l'on change son origine
   Or ces deux manipulations du monde réel, correspond exactement aux opérations σ et c^k (pour $k \in \{0, 1, \dots 9\}$) respectivement.
   Remarquons, ce n'est pas évident que les opérations c et σ peuvent se faire à tout moment ; et qu'elles ne commutent pas.
   Toutefois notons que pour tout $i \in \mathbb{N}_{10}$ (dans $\mathbb{Z}_{10}$) :
   $$(\sigma \circ c \circ \sigma \circ c)(i) = (\sigma \circ c \circ \sigma)(i+1) = (\sigma \circ c)(10-(i+1)+1) = (\sigma \circ c)(10-i) = \sigma(10-i+1) = 10-(10-i+1)+1 = i$$
   Donc $\sigma c \sigma = c^{-1} = c^9$ et donc comme $\sigma^{-1} = \sigma$: $\quad c \circ \sigma = \sigma \circ c^9$.

   ℓ_1 et ℓ_2 deux permutation de E représente le même collier
   si et seulement si les $\exists\, p \in \{0, 1, \cdots 9\}$ tel que $\ell_1 = (c^p) \cdot \ell_2$ ou $\ell_1 = (\sigma \times c^p) \cdot \ell_2$

   Il s'agit d'une relation d'équivalence.
   $$\ell_1 \equiv \ell_2 \Longleftrightarrow \exists\, k \in \{0, 1, \dots 9\}, h \in \{0, 1\} \mid \ell_1 = (\sigma^h \times c^p) \cdot \ell_2$$
   Toute les classes d'équivalence ont le même cardinal : 10×2 ($k \in \{0, 1, \dots 9\}$, - $h \in \{0, 1\}$).
   Il y a donc $\dfrac{10!}{2 \times 10} = \dfrac{9!}{2} = 181440$ classes d'équivalentes.
   Chacune correspond bijectivement à un collier.

   Si les perles sont de couleurs différentes, il y a 181 440 colliers différents

2. Combien de colliers différents s'il y a 5 perles noires et 5 perles blanches ?

Piste de recherche. . .
Pour répondre à cette question, nous allons nous appuyer sur le cas particulier ici afin de dégager une formule (formule de Burnside) et une stratégie de démonstration.
La réponse n'est pas simple. ≪ *Le* ≫*collier* $(B, N, B, N, B, N, B, N, B, N)$ *risque d'être compté de nombreuses fois.*
Il y a en fait deux stratégie :
(a) La première consiste à compter le nombre total de collier (de l'ordre de $\binom{10}{5} = 252$*, en première approximation) puis à* ***soustraire*** *les colliers comptés en double, triple. . .*
(b) Associer ensemble les transformations sur ℓ *qui conduisent au même collier. Puisqu'il ne faudra compter qu'une seule fois ce collier. On regroupe donc ensemble ces transformations.*

C'est la seconde méthode qu'on va suivre. Elle se termine par un double décompte (somme double) et pour que le calcul soit plus simple, il est préférable de changer l'ordre de sommation. On trouve alors la formule de Burnside.

Rappelons que les transformations acceptées qui agissent sur les colliers sont données par $G =< c, \sigma >= \{\sigma^h c^k, h \in \{0,1\}, k \in \{0,9\}\}$. G est un groupe de 20 éléments.
Notons Φ, l'application qui a une liste de 10 lettres dont 5 sont des N et 5 sont des B associe la liste identique, où l'on a associé les indices de position. L'application Φ^{-1} enlève les indices (attention : elle n'est pas injective !).

Considérons par exemple le collier $\ell = (N, B, N, N, N, B, N, B, B, B)$.
On a alors $\Phi(\ell) = (N_1, B_2, N_3, N_4, N_5, B_6, N_7, B_8, B_9, B_{10})$
Lorsqu'on lui applique la transformation $\sigma \circ c^3$:

$$\sigma \circ c^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sigma \circ c^3 \cdot \Phi(\ell) &= \sigma \circ c^3 \cdot (N_1, B_2, N_3, N_4, N_5, B_6, N_7, B_8, B_9, B_{10}) \\ &= (N_7, B_6, N_5, N_4, N_3, B_2, N_1, B_{10}, B_9, B_8) \end{aligned}$$

$$\Phi^{-1}\big(\sigma \circ c^3 \cdot \Phi(\ell)\big) = \ell$$

Et donc, ce collier risque d'être compté plusieurs fois.

A priori, lorsqu'on écrit les colliers sous forme de liste, il faut choisir 5 places pour les perles noires. Il y a donc $\binom{10}{5} = 252$ colliers a priori différents.
Or dans l'exemple précédent, on a vu que ce décompte est mauvais. Nous allons donc ranger ensemble les colliers identiques.
On s'intéresse donc à la relation suivante :

$$\ell_1 \equiv \ell_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, g \in G \mid \Phi^{-1}(g \cdot \Phi(\ell_1)) = \ell_2$$

C'est une relation d'équivalence. **Ce que l'on cherche c'est** le nombre d'orbite de cette relation, ou encore **le nombre de classe d'équivalence différentes**. On suppose qu'il vaut r.

- Notons ℓ_1, $\ell_2 \ldots \ell_r$ les r colliers différents.
  Ce sont des représentants des r classes d'équivalence que l'on cherche à dénombrer.
  Et pour chacun, on peut (on doit) lui associer $G_i = \{g \in G \mid \Phi^{-1}(g \cdot \Phi(\ell_i)) = \ell_i\}$.
  Et par conséquent $|G_i|$ correspond à la taille de classe d'équivalence de ℓ_i.
  Ou encore $|G_i| = |\{\ell \mid \ell \equiv \ell_i\}|$.
  Ce que l'on cherche c'est r, mais comme on a une partition (classe d'équivalence) :

$$\{\ell, \mid \ell \text{ contient } 5N, 5B\} = \bigcup_{i=1}^{r} \{\ell \mid \ell \equiv \ell_i\} \Longrightarrow \binom{10}{5} = \sum_{i=1}^{r} \big|\{\ell \mid \ell \equiv \ell_i\}\big| = \sum_{i=1}^{r} |G_i|$$

Précisons ce que vaut G_i, la classe d'équivalence de ℓ_i.
A priori, on applique des éléments de g à ℓ_i, on regarde donc l'action de g sur ℓ_i.
En fait, G agit sur ℓ_i en définissant des parties de cardinaux identiques (égaux à $|G_i|$).
Considérons une nouvelle relation d'équivalence, sur G, paramétré par i :

$$g_1 \equiv_i g_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi^{-1}\big(g_1 \cdot \Phi(\ell_i)\big) = \Phi^{-1}\big(g_2 \cdot \Phi(\ell_i)\big)$$

Alors évidemment, $G_i = \overline{\mathrm{id}}$ pour la relation d'équivalence $\equiv_i$. Son cardinal est $|G_i|$.
Notons $\overline{g_k}$, la classe d'équivalence de g_k alors $\psi_k : g \mapsto g \circ g_k$ est une bijection de G_i sur $\overline{g_k}$:
$\forall\, h \in \overline{g_k}$, en notant $h' = h g_k^{-1}$, on a $\psi(h') = h' g_k = h$ et $h' \in G_i$, car

$$\Phi^{-1}(h' \cdot \Phi(\ell_i)) = \Phi^{-1}(h g_k^{-1} \cdot \Phi(\ell_i)) = \Phi^{-1}(g_k g_k^{-1} \cdot \Phi(\ell_i)) = \ell_i$$

puisque $h \equiv_i g_k$.
Finalement toutes les classes d'équivalence de $\frac{G}{\equiv_i}$ ont un même nombre d'éléments : $|G_i|$.
Ainsi

$$|G| = \sum_{\overline{g_k} \in \frac{G}{\equiv_i}} |\overline{g_k}| = \sum_{\overline{g_k} \in \frac{G}{\equiv_i}} |G_i| = |G_i| \times \left|\frac{G}{\equiv_i}\right|$$

Pour illustrer ce que l'on vient d'écrire, on peut reprendre comme exemple le collier $\ell_i = (N, B, N, N, N, B, N, B, B, B)$.

On a alors $G_i = \{\mathrm{id}, \sigma \circ c^3\}$, $|G_i| = 2$

Et si on applique G, on trouve (20 résultats dans l'ordre $\mathrm{id}, c, c^2, \dots c^9, \sigma, \sigma c, \cdots, \sigma c^9$) :

$\underline{(N,B,N,N,N,B,N,B,B,B)}$	(B,N,B,N,N,N,B,N,B,B)	(B,B,N,B,N,N,N,B,N,B)	(B,B,B,N,B,N,N,N,B,N)
(N,B,B,B,N,B,N,N,N,B)	(B,N,B,B,B,N,B,N,N,N)	(N,B,N,B,B,B,N,B,N,N)	(N,N,B,N,B,B,B,N,B,N)
(N,N,N,B,N,B,B,B,N,B)	(B,N,N,N,B,N,B,B,B,N)	(B,B,B,N,B,N,N,N,B,N)	(N,B,B,B,N,B,N,N,N,B)
(B,N,B,B,B,N,B,N,N,N)	(N,B,N,B,B,B,N,B,N,N)	(N,N,B,N,B,B,B,N,B,N)	(N,N,N,B,N,B,B,B,N,B)
(B,N,N,N,B,N,B,B,B,N)	$\underline{(N,B,N,N,N,B,N,B,B,B)}$	(B,N,B,N,N,N,B,N,B,B)	(B,B,N,B,N,N,N,B,N,B)

On voit alors qu'il y a $10 (= \left|\frac{G}{\equiv_i}\right|)$ colliers différents : chacun apparait $2 (= |G_i|)$ fois !

- On peut aussi pour toute transformation $g \in G$, considérer $\mathcal{L}_g = \{\ell \mid \Phi^{-1}(g \cdot \Phi(\ell)) = \ell\}$,
  $\mathcal{L}_g$ est un ensemble de « points » fixes (pour g).

On a les équivalences :

$$\Phi^{-1}(g \cdot \Phi(\ell_i)) = \ell_i \Longleftrightarrow g \in G_i \Longleftrightarrow \ell_i \in \mathcal{L}_g$$

Et donc, en terme ensembliste :

$$\{(g, \ell) \in G \times \mathcal{L} \mid \Phi^{-1}(g \cdot \Phi(\ell)) = \ell\} = \bigcup_{i=1}^{r} \left(\bigcup_{\ell \equiv \ell_i} \{(g, \ell), g \in G_i\} \right) = \bigcup_{g \in G} \{(g, \ell), \ell \in \mathcal{L}_g\}$$

Puis en terme de cardinaux (réunions disjointes) :

$$\Big|\{(g, \ell) \in G \times \mathcal{L} \mid g \circ \ell = \ell\}\Big| = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\ell \equiv \ell_i} |\{(g, \ell), g \in G_i\}| = \sum_{g \in G} |\{(g, \ell), \ell \in \mathcal{L}_g\}|$$

Donc

$$r|G| = \sum_{i=1}^{r} |G| = \sum_{i=1}^{r} \left|\frac{G}{\equiv_i}\right| |G_i| = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\ell \equiv \ell_i} |\{(g, \ell), g \in G_i\}| = \sum_{g \in G} |\{(g, \ell), \ell \in \mathcal{L}_g\}| = \sum_{g \in G} |\mathcal{L}_g|$$

Ce qui donne la formule de Burnside :

$$\boxed{r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathcal{L}_g|}$$

Faisons l'étude de chacun de ces ensembles $\mathcal{L}_g$, pour tout $g \in G$.

— Pour $g = \mathrm{id}$, alors trivialement $\mathcal{L}_g$ est l'ensemble des listes avec 5 noires et 5 blanches.
Il s'agit de compter les positions occupées par les 5 noires. Il y a donc $\binom{10}{5} = 252$

— Pour $g = c^k$. Soit $\ell \in \mathcal{L}_g$.
Supposons que N soit en position i dans ℓ, relation notée $\ell[i] = N$.
Alors comme $\Phi^{-1}(c^k \cdot \Phi(\ell)) = \ell$, $\ell[j + k] = \ell[j]$ pour tout j (addition modulo 10).
Et donc $N = \ell[i] = \ell[i + k] = \cdot = \ell[i + 4k] = \ell[i + 5k]$.
Or il n'y a que 5 boules noires, donc il existe $0 \leqslant a < b \leqslant 5$ tels que $i + ak \equiv i + bk[10]$, donc $10|k(b - a)$.
Et $0 < b - a \leqslant 5$, donc $10 \wedge k \neq 1$.

— Si $10 \wedge k = 1$, alors $\mathcal{L}_g = \emptyset$

— Si $10 \wedge k = 5$, alors $\ell[i] = \ell[i + 5]$, et donc il y a un nombre pair de boules noires.
Ceci est impossible donc $\mathcal{L}_g = \emptyset$, également

— Si $10 \wedge k = 2$, alors $b - a = 5$, dès qu'une boule noire est positionnée, alors son orbite par c est imposée (elle revient en position initiale qu'en 5 tours). Il y a donc deux orbites possibles sous l'action de c. Et donc il n'y a que deux colliers fixés par une tel transformation.
Dans ce cas : $|\mathcal{L}_g| = 2$

— Pour $g = \sigma c^k$. Soit $\ell in \mathcal{L}_g$.
Supposons que N soit en position i dans ℓ, relation notée $\ell[i] = N$.
Alors comme $\Phi^{-1}(c^k \cdot \Phi(\ell)) = \ell$, $\ell[11 - (j + k)] = \ell[j]$ pour tout j (addition modulo 10).
Et donc $N = \ell[i] = \ell[11 - k - i] = \ell[i]$.
Si $11 - k - i \neq i$, alors cela impose la disposition de deux boules noires.
en raisonnant par parité, ainsi, on place les boules noires deux par deux.
Ce qui est impossible, car il y en a 5.
donc nécessairement : $11 - k - i \equiv i[10]$, i.e. $2i = 11 - k[10]$.
Il faut nécessairement que k soit impair.

— Si k est pair, $\mathcal{L}_g = \emptyset$.
— Si $k = 2p + 1$ est impair ($p < 5$), deux places sont invariantes par la transformations : les solutions i de $2i = 11 - (2p+1)[10]$ i.e. $2(i+p) = 0[10]$ donc $i = 5 - p$ ou $i = 10 - p$.
Il s'agit donc de placer une boule noire sur l'une de ces deux places (« 1 parmi 2 »), puis les 4 boules noires, par couple $(i, 11 - k - i) = (i, 10 - 2p - i)$ sur les 8 places restantes (« 2 parmi 4 »).
Dans ce cas : $\mathcal{L}_g = 2 \times 6 = 12$.

On applique alors la formule :

$$r = \frac{1}{20}(1 \times 252 + 5 \times 0 + 4 \times 2 + 5 \times 0 + 5 \times 12) = \frac{320}{20} = 16$$

$\boxed{\text{Il y a donc 16 colliers avec 5 perles noires et 5 perles blanches}}$

3. On applique la formule. Pour cela ,faisons l'étude de chacun de ces ensembles $\mathcal{L}_g$, pour $g \in G$.
— Pour $g = \mathrm{id}$, alors $\mathcal{L}_g$ est l'ensemble des listes possibles : $\binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{4} = \dfrac{10!}{1!2!3!4!} = 12\,600$
— Pour $g = c^k$. La rouge ne peut revenir sur elle-même.
Donc $\mathcal{L}_g = \emptyset$
— Pour $g = \sigma c^k$.
Il faut que la perle rouge soit placée en une position fixée, donc en i tel que $11 - k - i = i[10]$.
Cela n'est possible que si k est impair (voir étude précédente).
On a alors $k = 2p + 1$, et donc la rouge est en $5 - p$, ou en $10 - p$.
Il y a donc 2 choix possibles pour la rouge, l'autre point fixé est occupé par une perle jaune.
Puis il reste alors 4 couples de places à occuper par des couples de même couleur :
un couple bleu, un jaune et deux verts. Cela donne : $\dfrac{4!}{1!1!2!} = 6$ possibilités.
Dans ce cas : si k pair, $|\mathcal{L}_g| = 0$, si k impair, $|\mathcal{L}_g| = 2 \times 6 = 12$

On applique alors la formule :

$$r = \frac{1}{20}(1 \times 12\,600 + 9 \times 0 + 5 \times 0 + 5 \times 12) = \frac{320}{20} = 633$$

$\boxed{\text{Il y a donc 633 colliers avec 1 perle rouge, 2 perles bleues, 3 perles jaunes et 4 perles vertes}}$

Problème : le nombre de n-combinaison

A. Premiers exemples

Le but de cette partie est de donner quelques exemples.

1. Dans le cas où tous les P_i sont des singletons, les n-combinaisons sont alors des n-liste sans répétition obtenue à partir de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.
Il y a en a donc autant que de permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots n\}$.

$\boxed{\text{Le nombre de } n\text{-combinaisons telles que les boutons soient poussés l'un après l'autre est } n!}$

2. Les 3-combinaisons sont :
$(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$
$(\{1, 3\}, 2)$, $(\{2, 3\}, 1)$, $(\{1, 2\}, 3)$ et $(2, \{1, 3\})$, $(1, \{2, 3\})$, $(3, \{1, 2\})$ et $(\{1, 2, 3\})$.
Aucune n'est en double. Nous n'en avons oublié aucune, car nous avons procédé méthodiquement : en écrivant les $3! = 6$ 3-listes, puis les 3 cas avec une simultanéité pour commencer, les 3 cas avec une simultanéité pour finir et la situation où l'on appuie sur les trois boutons simultanément.
On a donc

$$\boxed{a_3 = 13}$$

B. Relation de récurrence

Le but de cette partie est d'établir une relation de récurrence vérifiée par les réels a_n, $n \geqslant 1$.
L'entier n est supérieur ou égal à 1. Soit S une n-combinaison quelconque ; S est une suite ordonnée $(P_1, P_2, \ldots, P_j)$ de j parties P_1, P_2, …, P_j de l'ensemble A_n, deux à deux disjointes, non vides, dont la réunion est égale à A_n ($1 \leqslant j \leqslant n$).

1. Lorsque le nombre d'éléments de P_1 est k, il s'agit donc de choisir un sous-ensemble de k éléments à partir de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ à n éléments.
Or il y a $\dbinom{n}{k}$ tels sous-ensembles.

$\boxed{\text{Donc, il y a } \binom{n}{k} \text{ de choix possibles pour la partie } P_1 \text{ lorsque le nombre d'éléments de } P_1 \text{ est } k}$

2. P_1 est maintenant fixé et est composé de k éléments ($k \in [\![1, n-1]\!]$).
Pour terminer la n-combinaison, il faut choisir une $n-k$ combinaison avec les $n-k$ chiffres restants.
Et si $k = n$, il n'y a plus qu'une combinaison possible ce qui correspond à $a_{n-n} = a_0 = 1$.

$$\boxed{\text{Dans cette situation (où } k \text{ et } P_1 \text{ sont fixés), il y a donc } a_{n-k}\ n\text{-combinaisons S possibles}}$$

3. Ainsi, pour compter le nombre de n-combinaisons nous allons procéder par sous cas :
   — Il faut d'abord choisir un entier k qui correspond à la taille de P_1.
   Toutes les valeurs sont possibles entre 1 et n. Ces situations se réunissent pour former le nombre total de cas, la réunion est disjointe, il faudra donc faire une addition avec k variant de 1 à n.
   — Puis, pour chaque k, il faut choisir un sous-ensemble à k éléments (donc $\binom{n}{k}$ possibilités)
   — Puis (donc multiplication), pour chacune de ces situations il y a a_{n-k} possibilités de compléter la n-combinaison.

   Par conséquent $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{n-p} a_p$ en posant $p = n-k$.
   Et avec la symétrie du coefficient binomial :

$$\boxed{a_n = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} a_p}$$

   On a alors $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{k}{2} a_k = \binom{0}{2} a_0 + \binom{1}{2} a_1 = 1 + 2 = 3$,
   puis $a_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{k}{3} a_k = \binom{0}{3} a_0 + \binom{1}{3} a_1 + \binom{2}{3} = 1 + 3 + 3 \times 3 = 13$

$$\boxed{\text{On retrouve bien } a_2 = 3 \text{ et } a_3 = 13}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $b_n = \dfrac{a_n}{n!} = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{n} a_k}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!n!} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} \frac{a_k}{k!}$
   Et comme $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_k}{k!} = b_k$, alors

$$\boxed{b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} b_k}$$

C. Majoration des réels b_n

1. On note $f_n : x \mapsto e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \frac{x^n}{n!}\right)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_n(0) = e^0 - 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{0^k}{k!} = 1 - 1 = 0$. Donc

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad f_n(0) = 0}$$

   (b) f_n est la différence de la fonction exponentielle et d'un polynôme :

$$\boxed{\text{elle est donc dérivable.}}$$

   Et $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = e^x - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}k!$ (car la dérivée de $x \mapsto 1$ est nulle).
   Donc $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = e^x - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}(k-1)! = e^x - \sum_{h=0}^{n-1} x^h h!$ en posant $h = k-1$.
   Et donc

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad f_n' = f_{n-1}.}$$

   (c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$: « pour tout $x \geqslant 0$, $f_n(x) \geqslant 0$ ».

— $f_0(x) = e^x - 1$.
Or $\forall\ x > 0$, $e^x \geqslant e^0 = 1$ car exp est croissante donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie, alors $f_n(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
Or $f'_{n+1} = f_n$, donc f_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $f_{n+1}(0) = 0$, pour tout $x \geqslant 0$, $f_{n+1}(x) \geqslant 0$ et donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.

La récurrence est démontrée et

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \geqslant 0,\ f_n(x) \geqslant 0}$$

On a donc $\forall\ x \geqslant 0$, $e^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$
en particulier pour $x = \ln 2$:

$$\boxed{2 = e^{\ln 2} \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!}}$$

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $\forall\ k \leqslant n$, $b_k \leqslant \dfrac{1}{(\ln 2)^k}$ »

— $b_0 = \dfrac{a_0}{0!} = 1$ et $\dfrac{1}{(\ln 2)^0} = 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Alors $\forall\ k \leqslant n$, $b_k \leqslant \dfrac{1}{(\ln 2)^k}$.
en outre $b_{n+1} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{(n+1-p)!} =\leqslant \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(\ln 2)^p (n+1-p)!}$ avec $h = n+1-p$
donc $b_{n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{h=1}^{n+1} \frac{1}{(\ln 2)^{n+1-h} h!} = \frac{1}{(\ln 2)^{n+1}} \sum_{h=1}^{n+1} \frac{(\ln 2)^h}{h!}$.
Or d'après la relation 1.(c) (en $n+1$, puisqu'elle est vraie pour tout entier) :
$2 \geqslant 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\ln 2)^k}{k!}$, donc $1 \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\ln 2)^k}{k!}$
Et donc $b_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{(\ln 2)^{n+1}} 1$.
L'inégalité est donc obtenue pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée et donc :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ b_n \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$, alors $a_n = b_n \times n!$ et donc :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n \leqslant \frac{n!}{(\ln 2)^n}}$$

4. Faisons l'approximation $\ln 2 \approx 2^{2,8} \times 10^{-1}$, alors $(\ln 2)^{10} \approx 2^28 \times 10^{-10} = 2^8 \times (2^{10})^2 \times 10^{-10}$, puis $2^{10} \approx 10^3$ donc $(2^{10})^2 \approx (10^3)^2 = 10^6$.
Donc raisonnablement, $(\ln 2)^{10} \approx 2^8 \times 10^{6-4} = 256 \times 0,0001 = 0,0256$.
En réalité $(\ln 2)^{10} = 0,0256008\ldots$.
Puis $\dfrac{10!}{(\ln 2)^{10}} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2^8 \times 10^{-4}} = \dfrac{5 \times 9 \times 4 \times 7 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 1}{2^3 \times 10^{-4}}$
$= \dfrac{5 \times 9 \times 1 \times 7 \times 3 \times 5 \times 1 \times 3 \times 1}{10^{-4}} = 315 \times 45 \times 10^4 = 141\ 750\ 000.$
Donc

$$\boxed{a_{10} \leqslant 141\ 750\ 000}$$

D. Expression de a_n à l'aide d'une série infinie

On considère la fonction $f :]-\infty, \ln 2[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2 - e^x}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, \ln 2[$.

1. Soit $x < \ln 2$, alors en notant $\rho = \frac{x + \ln 2}{2}$, on a $x < \rho < \ln 2$,
et $|b_n x^n| < \left(\frac{\rho}{\ln 2}\right)^n$, d'après la question C.2.
Or la série de terme général $\left(\frac{\rho}{\ln 2}\right)^n$ est géométrique de raison $\frac{\rho}{\ln 2} \in]0, 1[$, donc est convergente.
Par majoration de série à termes positifs,

— $\sum_n |b_n x^n|$ converge,

— donc $\sum_n b_n x^n$ converge absolument

— donc $\sum_n b_n x^n$ converge

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n \text{ converge dès que } x < \ln 2.}$$

Remarques !

*C'est important : **on compare les termes généraux, pas les sommes partielles ! !** afin d'appliquer le théorème de comparaison.*

2. Etude de f

   (a) Pour tout $x < \ln 2$, $f(x) = \dfrac{1}{2-e^x}$, donc comme $2 - e^x \neq 0$: $2f(x) - e^x f(x) = 1$ et donc

   $$\boxed{\text{pour tout } x \in]-\infty, \ln 2[,\ e^x f(x) = 2f(x) - 1.}$$

   (b) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $x \in]-\infty, \ln 2[$, on applique la formule de Leibniz

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in]-\infty, \ln 2[, \qquad 2f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^x f^{(k)}(x)$$

   la dérivée $n-k^{\text{e}}$de exp est exp et la dérivée n^{e}de $x \mapsto 2f(x) - 1$ est $x \mapsto 2f^{(n)}(x)$ (si $n \geqslant 1$). Donc, en factorisant par e^x et simplifiant par 2

   $$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in]-\infty, \ln 2[, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)}$$

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(0) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0)$, et $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k$.

   Ainsi $2a_n = a_n + a_n = a_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ car $\binom{n}{n} = 1$.

   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n$: « $a_n = 2f^{(n)}(0)$ »

   — $a_0 = 1$ et $f^{(0)}(0) = f(0) = \frac{1}{2-e^0} = \frac{1}{2}$. Donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

   — Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour tout $k \leqslant n$, $\mathcal{Q}_k$ est vraie.

   $$a_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2f^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) = 2f^{(n)}(0)$$

   Donc $\mathcal{Q}_n$ est vraie.

   $$\boxed{\text{Ainsi pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ a_n = 2f^{(n)}(0)}$$

4. On note pour tout $x \in]-\ln 2, \ln 2[$, $u_k(x) = \dfrac{e^{kx}}{2^{k+1}}$.

   (a) $u_k(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{2}\right)^k$.
   Donc la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est une série géométrique de raison $r = \frac{e^x}{2}$ Comme $x \in]-\ln 2, \ln 2[$, alors $r \in]-1, 1[$ et donc :

   $$\boxed{\text{pour tout } x \in]-\ln 2, \ln 2[\ \sum_{k\geqslant 0} u_k \text{ est une série géométrique convergente.}}$$

   On a alors

   $$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{e^x}{2}} = \frac{1}{2-e^x} = f(x)}$$

(b) On <u>admet</u> ici que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^{(n)}(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors par dérivation répétée de l'exponentielle : $u_k^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2^{k+1}} k^n e^{kx}$. Donc

$$\forall\ x \in]-\ln 2, \ln 2[, \qquad f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}} e^{kx}$$

Ainsi avec le résultat trouvé en question 3 :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}}$$

(c) Avec $n = 3$ dans la somme précédent, on trouve bien $a_3 = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k^3}{2^{k+1}}$.

Puis, on effectue le calcul selon l'algorithme vue en cours en notant que

$$k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k = k^3 - 3k^2 + 2k + 3k^3 - 3k + k = k^3$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{2^{k+1}} = \frac{1}{16}\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k(k-1)(k-2)}{2^{k-3}} + \frac{3}{8}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} \\ &= \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{+\infty} \binom{k}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3} + \frac{3}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} \binom{k}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{3}{8}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^4} + \frac{3}{4}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 6 + 6 + 1 = 13 \end{aligned}$$

car pour $x \in]-1, 1[$, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n} = \dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$ (cours, série binomiale négative) et ici $x = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On vérifie bien que } a_3 = 13}$$