Devoir à la maison n°11
CORRECTION

Problème

I. Trace et base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots n\}$,

$$A \times E_{i,j} = \left(\sum_{1 \leqslant h,k \leqslant n} a_{h,k} E_{h,k} \right) \times E_{i,j} = \sum_{1 \leqslant h,k \leqslant n} a_{h,k} E_{h,k} E_{i,j} = \sum_{1 \leqslant h,k \leqslant n} a_{h,k} \delta_{i,k} E_{h,j}$$

Lorsque k varie entre 1 et n, $\delta_{i,k} = 0$ sauf pour $k = i$; dans la somme il ne reste que le cas $k = i$. Donc

$$\boxed{A \times E_{i,j} = \sum_{h=1}^{n} a_{h,i} E_{h,j}}$$

Finalement, on obtient une matrice avec la colonne j non nulle (les autres sont nulles) et dans cette colonne j se trouve l'ancienne colonne i de A.
De même

$$E_{i,j} \times A = \sum_{1 \leqslant h,k \leqslant n} a_{h,k} E_{i,j} E_{h,k} = \sum_{1 \leqslant h,k \leqslant n} a_{h,k} \delta_{j,h} E_{i,k}$$

Donc

$$\boxed{E_{i,j} \times A = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} E_{i,k}}$$

Finalement, on obtient une matrice avec la ligne i non nulle (les autres sont nulles) et dans cette ligne i se trouve l'ancienne ligne j de A.

   (b) On suppose que, pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \times M = M \times A$.
Donc en particulier pour $M = E_{i,j}$: $\sum_{k=1}^{n} a_{j,k} E_{i,k} = \sum_{h=1}^{n} a_{h,i} E_{h,j}$.
Par écriture unique sur la base $E_{h,k}$, on a :
— $a_{j,k} = 0$ si $k \neq j$,
— $a_{h,i} = 0$ si $i \neq h$
— et si $j = k$ et $i = h$ alors $a_{j,j} = a_{i,i}$
Finalement, A est une matrice avec tous les coefficients hors diagonale nuls, et les coefficients sur la diagonale tous identiques. Autrement écrit,

$$\boxed{A \text{ est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme } \lambda I_n \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

   (c)

$$\sum_{1 \leqslant i,j,h \leqslant n} (E_{j,i} a_{h,i} E_{h,j}) = \sum_{1 \leqslant i,j,h \leqslant n} (\delta_{i,h} a_{h,i} E_{j,j})$$

Comme $\delta_{h,i} = 0$ si $i \neq h$, on peut réduire la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (E_{j,i} A E_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,i} E_{j,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \sum_{j=1}^{n} E_{j,j} = \text{tr}(A) I_n$$

Donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (E_{j,i} A E_{i,j}) = \text{tr}(A) I_n}$$

2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Pour tout couple $(i,j) \in \{1, \dots n\}$, $A \times E_{i,j} = \sum_{h=1}^{n} a_{h,i} E_{h,j}$,
   donc $\text{tr}(A \times E_{i,j})$ est le coefficient situé en ligne $h = j$, donc

   $$\boxed{\text{tr}(A \times E_{i,j}) = a_{j,i}.}$$

   (b) Puisque pour tout matrice M, $\text{tr}(A \times M) = 0$,
   alors en particulier pour $M = E_{i,j}$, $\text{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i} = 0$.
   Ainsi, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $a_{j,i} = 0$, c'est-à-dire

   $$\boxed{A \text{ est nulle}}$$

II : Endomorphismes qui conserve le déterminant de matrices carrées d'ordre 2

1. Les calculs donnent (il faut VRAIMENT le faire !!) :

$$PE_{1,1}Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ cx & cy \end{pmatrix}$$

$$\boxed{PE_{1,1}Q = \begin{pmatrix} ax & ay \\ cx & cy \end{pmatrix}, \text{ de même } PE_{1,2}Q = \begin{pmatrix} az & at \\ cz & ct \end{pmatrix}, PE_{2,1}Q = \begin{pmatrix} bx & by \\ dx & dy \end{pmatrix} \text{ et } PE_{2,2}Q = \begin{pmatrix} bz & bt \\ dz & dt \end{pmatrix}}$$

2. rang $(E_{1,1}) = 1$, donc $\det(E_{1,1}) = 0$ ($E_{1,1}$ n'est pas inversible).
   Donc $\det(\varphi(E_{1,1})) = 0$, puisque le déterminant est conservé par φ.
   Alors $\varphi(E_{1,1})$ est de rang égal à 1 ou à 0.
   Pour les mêmes raisons, $\varphi(E_{1,2})$, $\varphi(E_{2,1})$ et $\varphi(E_{2,2})$ sont de rang égal à 1 ou à 0.
   Par ailleurs, $\det(E_{1,1} + E_{2,2}) = 1$, donc $\det(\varphi(E_{1,1} + E_{2,2})) = 1$.
   donc $\varphi(E_{1,1}) + \varphi(E_{2,2}) = \varphi(E_{1,1} + E_{2,2})$ (par linéarité) est inversible donc de rang 2.
   Enfin, comme rang $(A + B) \leqslant$ rang (A) + rang (B),
   il est donc impossible que rang $(\varphi(E_{1,1})) = 0$, et donc rang $(\varphi(E_{1,1})) = 1$;
   et de même rang $(\varphi(E_{2,2})) = 1$.
   Le même raisonnement avec $E_{1,2} + E_{2,1}$ donne les mêmes résultats pour $\varphi(E_{1,2})$ et $\varphi(E_{2,1})$.
   Finalement

   $$\boxed{\text{rang } (\varphi(E_{1,1})) = \text{rang } (\varphi(E_{1,2})) = \text{rang } (\varphi(E_{2,1})) = \text{rang } (\varphi(E_{2,2})) = 1.}$$

3. $\det(M) = 0$ ssi M n'est pas inversible,
   Or on a vu en cours : M non inversible $\Longleftrightarrow$, Ker $M \neq \{0\} \Longleftrightarrow \exists\, Z$ tel que $MZ = 0$

   $$\boxed{\det(M) = 0 \text{ si et seulement si il existe } Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ non nulle telle que } M \times Z = 0.}$$

4. rang $(M) = 1$, donc M est non nulle. Soit X une colonne de M non nulle.
   Puisque le rang de M est égale à 1, cela signifie que les rang de la famille des colonnes de M vaut 1. Elles sont donc toutes colinéaires à X.
   Notons pour la colonne i, y_i le coefficient de proportionnalité. Puis $Y = (y_1 \ y_2)^T$, la colonne.
   Alors par construction

   $$\boxed{M = X \times Y^T}$$

   X et Y sont nécessairement est non nulle, sinon on aurait $M = 0$.

5. Puisque rang $(\varphi(E_1)) = 1$ et que rang $(\varphi(E_2)) = 1$, en appliquant 4, on peut affirmer qu'

   $$\boxed{\text{il existe } X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \varphi(E_1) = X_1 \times Y_1^T \text{ et } \varphi(E_2) = X_2 \times Y_2^T}$$

6. De même rang $(E_1 + E_2) = 1$, donc (même raisonnement qu'en 2.), rang $(\varphi(E_1 + E_2)) = 1$.
   Ainsi, en appliquant 2.(b), on en déduit l'existence de Z non nul tel que $\varphi(E_1 + E_2) \times Z = 0$
   Enfin, comme φ est linéaire : $\varphi(E_1 + E_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2) = X_1 \times^t Y_1 + X_2 \times^t Y_2$.
   Par conséquent :

   $$\boxed{\text{il existe } Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ non nul telle que } X_1 \times^t Y_1 \times Z + X_2 \times^t Y_2 \times Z = 0 \ (*)}$$

7. On suppose que (X_1, X_2) est libre.

(a) Nous avons $X_1 \times Y_1^T \times Z + X_2 \times Y_2^T \times Z = 0$.
Or $\lambda_1 = Y_1^T \times Z$ et $\lambda_2 = Y_2^T \times Z$ sont des nombres réels vérifiant $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$.
Or la famille (X_1, X_2) est libre ; donc nécessairement $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$.
Notons N la matrice dont la première ligne est Y_1^T et la seconde est Y_2^T.
Alors $N \times Z = 0$ avec Z non nul, donc N n'est pas inversible, donc le rang de l'espace engendré par ces lignes vaut au plus 1 ;
ces lignes sont colinéaires. Donc Y_1^T et Y_2^T sont colinéaires ou encore

$$\boxed{Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ sont colinéaires.}}$$

(b) Notons c le nombre réel tel que $Y_2 = cY_1$.
Alors $\varphi(E_1) = X_1 \times^t Y_1$ et $\varphi(E_2) = X_2 \times^t Y_2 = X_2 \times^t (cY_1) = (cX_2) \times^t Y_1$

$$\boxed{\text{il existe } X(=X_1), X' = (cX_2), Y(=Y_1) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } \varphi(E_1) = X \times^t Y, \varphi(E_2) = X' \times^t Y}$$

A noter qu'il n'y a pas d'unicité dans les choix de X, X', Y

(c) Même raisonnement.
rang $(\varphi(E_3)) = 1$, donc il existe $X_3, Y_3 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\varphi(E_3) = X_3 \times Y_3^T$.
rang $(E_1 + E_3) = 1$, donc rang $(\varphi(E_1 + E_3)) = 1$, donc il existe Z non nulle telle que

$$0 = \varphi(E_1 + E_3) \times Z = \varphi(E_1) \times Z + \varphi(E_3) \times Z = X \times Y^T \times Z + X_3 \times Y_3^T \times Z$$

Supposons que (X, X_3) est libre (on fait un raisonnement par l'absurde)
alors comme en (a), ${}^tY \times Z = Y_3^T Z = 0$.
et donc $\varphi(E_2 + E_3) \times Z = X' \times Y^T \times Z + X_3 \times Y_3^T \times Z = 0 + 0 = 0$
donc $\det(\varphi(E_2 + E_3)) = 0$.
Or $\det(E_2 + E_3) = -1 = \det(\varphi(E_2 + E_3))$ car φ conserve le déterminant.
On a donc deux valeurs contradictoires pour $\det(\varphi(E_2 + E_3))$;
notre hypothèse initiale est fausse : (X, X_3) est une famille liée de vecteurs non nuls.
Notons c' le réel tel que $X_3 = c'X$.
Dans ce cas $\varphi(E_3) = c'X \times Y_3^T = X \times (c'Y_3)^T$,

$$\boxed{\text{il existe } Y' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } \varphi(E_3) = X \times (Y')^T}$$

(d) Toujours le même raisonnement.
Comme rang $(\varphi(E_4)) = 1$, il existe X_4, Y_4 telle que $\varphi(E_4) = X_4 \times Y_4^T$.
Puis comme rang $(\varphi(E_2 + E_4)) = 1$, il existe Z tel que $X \times (Y')^T \times Z + X_4 \times Y_4^T \times Z = 0$
On démontre alors que (Y, Y_4) sont liés (en faisant un raisonnement par l'absurde comme précédemment en obtenant une contradiction avec le fait que $\det(\varphi(E_1 + E_4)) \neq 1$).
Donc il existe α_1 tel que $\varphi(E_4) = \alpha_1 X_4 \times (Y')^T$.
Puis pour les mêmes raisons, comme rang $(\varphi(E_3 + E_4)) = 1$, on montre : (X_3, X') liée.
Donc

$$\boxed{\text{il existe } \alpha \text{ tel que } \varphi(E_4) = \alpha X' \times (Y')^T}$$

(e) Prenons $P = (X\ X')$ et $Q = \begin{pmatrix} Y^T \\ (Y')^T \end{pmatrix}$.
Alors d'après la question 1. on a :

$$PE_{1,1}^T Q = PE_{1,1}Q = X \times Y^T = \varphi(E_{1,1}) \qquad P \times E_{1,2}^T \times Q = P \times E_{2,1} \times Q = X' \times Y^T = \varphi(E_{1,2})$$

$$P \times E_{2,1}^T \times Q = P \times E_{1,2} \times Q = X \times (Y')^T = \varphi(E_{2,1}) \qquad P(\alpha E_{2,2}^T)Q = P(\alpha E_{2,2})Q = \alpha X' \times (Y')^T = \varphi(E_4)$$

Finalement, puisque l'image d'une base est suffisante pour définir une application, on a :

$$\boxed{\varphi : M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto P \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & \alpha d \end{pmatrix} \times Q}$$

(f) Ce résultat étant vraie pour toute matrice M, on a en particulier :
— Pour $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(M) = 1$ et avec la formule précédente :
$\det(M) = 1 = \det(\varphi(M)) = \det(PM^TQ) = \det(P)\det(Q)$. Donc

$$\boxed{\det(P)\det(Q) = 1}$$

— Pour $M = I_2$, on a $\det(M) = 1$ et $1 = \det(\varphi(M)) = \det(P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \times Q) = \det(P)\alpha\det(Q) = \alpha$. Donc

$$\boxed{\text{nécessairement } \alpha = 1}$$

Par conditions nécessaires (il faudra faire une réciproque) :

$$\boxed{\varphi = v_{P,Q} \text{ avec } P = (X\ X') \text{ et } Q = \begin{pmatrix} Y^T \\ (Y')^T \end{pmatrix} \text{ inversibles vérifiant } \det(P)\det(Q) = 1}$$

8. On suppose que (X_1, X_2) liée.

(a) Donc en notant $\overline{X} = X_1$, puis choisissant c tel que $X_2 = c\overline{X}$ (car colinéaires), $\overline{Y} = Y_1$ et enfin $\overline{Y}' = cY_2$, on a :

$$\boxed{\varphi(E_1) = \overline{X} \times \overline{Y}^T \text{ et } \varphi(E_2) = c\overline{X} \times Y_2^T = \overline{X} \times (\overline{Y}')^T}$$

(b) On raisonne comme en 7.(c), en exploitant le fait que $\varphi(E_3)$ est de rang 1 : $\varphi(E_3) = \overline{X}_3 \times \overline{Y}_3^T$.
Puis que $\varphi(E_1 + E_3)$ est également de rang 1 :
il y a un lien entre $\overline{X}$ et $\overline{X}_3$ ou entre $\overline{Y}$ et $\overline{Y}_3$.
Enfin, en raisonnant par l'absurde avec $\varphi(E_2 + E_3)$ inversible,
cela ne peut pas être un lien entre $\overline{X}$ et $\overline{X}_3$
Donc $\overline{Y}$ et $\overline{Y}_3$ sont colinéaires. Notons c tel que $c\overline{Y} = \overline{Y}_3$
Alors avec $\overline{X}' = c\overline{X}_3$, on a

$$\boxed{\varphi(E_3) = \overline{X}' \times \overline{Y}^T}$$

(c) Enfin, le même raisonnement donne l'existence de $\overline{\alpha}$ tel que $\varphi(E_4) = \overline{\alpha}\overline{X}' \times (\overline{Y}')^T$.
Puis on considère

$$\boxed{P = \left(\overline{X}\ \overline{X}'\right) \text{ et } Q = \begin{pmatrix} \overline{Y}^T \\ (\overline{Y}')^T \end{pmatrix}}$$

et l'on a

$$\varphi : M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto P \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & \overline{\alpha}d \end{pmatrix} \times Q$$

Enfin, comme ce résultat est vrai pour tout M, on prend M avec un coefficient nul en E_4,
on obtient : nécessairement $\det(P)\det(Q) = 1$.
Et puis en $M = I_2$, on a nécessairement $\overline{\alpha} = 1$.
Et donc

$$\boxed{\varphi \text{ est de la forme } u_{P,Q} \text{ avec } \det(P)\det(Q) = 1}$$

9. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $u_{P,Q}(M) = PMQ$ et $v_{P,Q}(M) = PM^TQ$, donc

$$\det(u_{P,Q}(M)) = \det(PMQ) = \det P \det M \det Q = \det(M) \times (\det P \det Q) = \det M$$
$$\det(v_{P,Q}(M)) = \det(PM^TQ) = \det P \det M^T \det Q = \det(M^T) \times (\det P \det Q) = \det M^T = \det M$$

Ainsi, (on a la réciproque) :

$$\boxed{\text{Si } P \text{ et } Q \text{ vérfient } \det P \times \det Q = 1, \text{ alors } u_{P,Q} \text{ et } v_{P,Q} \text{ conservent bien le déterminant}}$$

III. Endomorphisme qui conserve le polynôme caractéristique

Soit Φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui conserve le polynôme caractéristique, c'est-à-dire tel que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \qquad \chi_{\Phi(M)} = \chi_M$$

1. Etudions un exemple.
Considérons $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M \longmapsto \mathrm{tr}(M)I_2 - M$.

(a) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$\Phi(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = \mathrm{tr}(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)I_2 - (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = [\lambda_1 \mathrm{tr}(M_1) + \lambda_2 \mathrm{tr}(M_2)]I_2 - (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)$$

par linéarité de la trace, puis

$$\Phi(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = \lambda_1\left(\mathrm{tr}(M_1)I_2 - M_1\right) + \lambda_2\left(\mathrm{tr}(M_2)I_2 - M_2\right) = \lambda_1\Phi(M_1) + \lambda_2\Phi(M_2)$$

Ainsi

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de l'espace vectoriel } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Montrons également que Φ est bijectif.
Soit $M \in \text{Ker } \Phi$, alors $\Phi(M) = 0$, donc $\text{tr}(M)I_2 = M$, en prenant la trace des deux termes de cette relation, on obtient $\text{tr}(M) \times \text{tr}(I_2) = 2\text{tr}(M)$ et $\text{tr}(M)$, donc $2\text{tr}(M) = \text{tr}(M)$ ou encore $(2-1)\text{tr}(M) = 0$, ce qui donne $\text{tr}(M) = 0$.
Puis comme $M = \text{tr}(M)I_2$, on a $M = 0$, et donc $\text{Ker } \Phi = \{0\}$, donc Φ est injective
Pour des raisons de dimensions (égales entre l'espace d'arrivée et celui du départ : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), cela est suffisant pour affirmer que

$$\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme de l'espace vectoriel } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, supposons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\Phi(M) = (a+d)I_2 - M = \begin{pmatrix} a+d-a & -b \\ -c & a+d-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Donc $\chi_{\Phi(M)}(x) = x^2 - (d+a)x + (da - (-b)(-c)) = x^2 - (a+d)x - (ad - bc) = \chi_M(x)$.
Par conséquent,

$$\boxed{\Phi \text{ conserve le polynôme caractéristique.}}$$

2. (a) Pour toute matrice A, d'ordre 2, $\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$. Φ conserve le polynôme caractéristique, donc pour tout M :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \chi_{\Phi(M)}(x) = x^2 - \text{tr}(\Phi(M))x + \det(\Phi(M)) = \chi_M(x) = x^2 - \text{tr}(M)x + \det(M)$$

Or l'écriture d'un polynôme sur la base $(1, x, x^2)$ est unique ;
on peut identifier les coefficients. Donc

$$\boxed{\text{pour tout } M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \text{tr}(\Phi(M)) = \text{tr}(M) \text{ et } \det(\Phi(M)) = \det(M)}$$

Ce qui signifie exactement que Φ conserve la trace et le déterminant.

(b) Φ conserve le déterminant, donc d'après la deuxième partie,

$$\boxed{\text{il existe un couple } (P,Q) \text{ d'éléments de } GL_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \Phi = u_{P,Q} \text{ ou } \Phi = v_{P,Q}}$$

(c) Un tel couple (P,Q) ayant été considéré.
Si $\Phi = u_{P,Q}$.
On a pour tout M, $\Phi(M) = P \times M \times Q$.
Et, par ailleurs, La trace est conservée donc $\text{tr}(PMQ) = \text{tr}(M)$.
Si $\Phi = v_{P,Q}$.
Pour tout M, $\Phi(M) = P \times M^T \times Q$. Par conservation de la trace : $\text{tr}(PM^TQ) = \text{tr}(M)$.
Et donc en prenant M^T, on a $\text{tr}(PMQ) = \text{tr}(P(M^T)^TQ) = \text{tr}(M^T) = \text{tr}(M)$,
d'après une propriété de la trace.
Dans tous les cas, on trouve que

$$\boxed{\text{pour tout } M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \text{tr}(PMQ) = \text{tr}(M).}$$

(d) On a donc pour tout matrice M,

$$\text{tr}(M) = \text{tr}(PMQ) = \text{tr}((PM)Q) = \text{tr}(Q(PM)) = \text{tr}(QPM)$$

Puis par linéarité de la trace, pour tout matrice M,

$$\text{tr}\big((I_2 - QP)M\big) = \text{tr}(M - QPM) = 0$$

D'après I.2.(b), si pour tout M, $\text{tr}(AM) = 0$, cela impose que $A = 0$.
Donc ici $I_2 - QP = 0$ c'est-à-dire $QP = I_2$, cela suffit pour affirmer que

$$\boxed{Q = P^{-1}}$$

3. Par analyse, si Φ conserve le polynôme caractéristique,

   alors il existe P tel que $\Phi = u_{P,P^{-1}}$ ou tel que $\Phi = v_{P,P^{-1}}$.

   Cette condition est donc nécessaire, voyons si elle est suffisante l'étudiant de la réciproque.

   Soit donc $P \in GL_2(\mathbb{R})$, alors pour tout $M \in \mathcal{M}_2(R)$,

   $u_{P,P^{-1}}(M) = PMP^{-1}$, matrice semblable à M,

   donc elles ont mêmes trace et déterminant, donc même polynôme caractéristique.

   ainsi $u_{P,P^{-1}}$ conserve le polynôme caractéristique.

   $v_{P,P^{-1}}(M) = PM^TP^{-1}$, matrice semblable à M^T,

   donc elles ont mêmes trace et déterminant, donc même polynôme caractéristique.

   mais par ailleurs, $\chi_{M^T}(x) = \chi_M(x)$.

   ainsi $v_{P,P^{-1}}$ conserve le polynôme caractéristique.

   La réciproque est vérifiée.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les endomorphismes de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ qui conservent le polynôme caractéristique sont} \\ \\ \text{les } u_{P,P^{-1}} \text{ et } v_{P,P^{-1}} \text{ où } P \in GL_n(\mathbb{R})\end{array}}$$

4. Avec $P = E_{1,2} - E_{2,1}$, on peut faire des opérations intéressantes sur les lignes et les colonnes.

   Notons donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'après I.1.(b) et

$$PM^TP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ -a & -c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \Phi(M)$$

   Par conséquent, avec

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } \Phi = v_{P,P^{-1}}}$$