Devoir à la maison n°11

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Problème

Objectifs
Dans cet exercice on cherche à caractériser les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le polynôme caractéristique. Ici nous nous contenterons d'étudier ceux-ci pour $n = 2\ldots$ Le résultat reste donc à généraliser.
Dans la première partie, nous étudierons l'application trace sur l'ensemble des matrices. Cette partie se termine par un résultat qui sera exploité dans la partie 3.
Dans la deuxième partie, nous cherchons à identifier les endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui conservent le déterminant.
Puis nous terminons, en troisième partie, par caractériser les endomorphismes qui conservent le polynôme caractéristique.

Notations

— Pour tout matrice A, A^T désigne la matrice transposée de A, alors que $\mathrm{tr}(A)$ désigne sa trace.

— Pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$, on note $E_{i,j}$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ième ligne et j-ième colonne égal à 1. On rappelle que la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dite base canonique et que

$$\forall\ i,j,k,l \in \mathbb{N}_n \qquad E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l} \qquad \text{avec} \qquad \delta_{j,k} = 1 \text{ si } j = k \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

— Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$, on notera $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ les endomorphisms de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définis par

$$\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad u_{P,Q}(M) = P \times M \times Q \quad \text{et} \quad v_{P,Q}(M) = P \times M^T \times Q$$

I. Trace et base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on pourra exploiter la notation : $a_{i,j} =_i [A]^j$).
   (a) Pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots n\}$, exprimer les matrices $A \times E_{i,j}$ et $E_{i,j} \times A$, dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) On suppose que, pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \times M = M \times A$.
   Montrer alors que A est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (c) Exprimer simplement la somme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(E_{j,i}AE_{i,j})$
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots n\}$, exprimer la trace de la matrice $A \times E_{i,j}$.
   (b) On suppose que, pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A \times M) = 0$.
   Montrer alors que A est la matrice nulle.

II. Endomorphismes qui conserve le déterminant de matrices carrées d'ordre 2
Considérons φ, endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui conserve le déterminant.
Donc : $\quad \forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(\varphi(M)) = \det(M)$

1. Notons $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
   Calculer $P \times E_{1,1} \times Q$, $P \times E_{1,2} \times Q$, $P \times E_{2,1} \times Q$ et $P \times E_{2,2} \times Q$.
2. Montrer que rang $(\varphi(E_{1,1}))$ = rang $(\varphi(E_{1,2}))$ = rang $(\varphi(E_{2,1}))$ = rang $(\varphi(E_{2,2})) = 1$
3. Montrer que $\det(M) = 0$ si et seulement si il existe $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M \times Z = 0$.
4. Soit M tel que rang $M = 1$.
   Montrer qu'il existe deux matrices colonnes X, $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, non nulles tel que $M = X \times Y^T$.
5. En déduire qu'il existe $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(E_1) = X_1 \times Y_1^T$ et $\varphi(E_2) = X_2 \times Y_2^T$

6. Quel est le rang de $\varphi(E_1+E_2)$, en déduire qu'il existe $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$X_1 \times Y_1^T \times Z + X_2 \times Y_2^T \times Z = 0 \qquad (*)$$

7. On suppose que (X_1, X_2) est libre.
   (a) En utilisant $(*)$, montrer que Y_1 et Y_2 sont nécessairement colinéaires.
   (b) En déduire qu'il existe $X, X', Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\varphi(E_1) = X \times Y^T \qquad \varphi(E_2) = X' \times Y^T$$

   (c) De même montrer qu'il existe $Y' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(E_3) = X \times (Y')^T$.
   On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde
   (d) Montrer enfin qu'il existe α tel que $\varphi(E_4) = \alpha X' \times (Y')^T$
   (e) En notant $P = (X\ X')$ et $Q = \begin{pmatrix} Y^T \\ (Y')^T \end{pmatrix}$, montrer que

$$\varphi : M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto P \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & \alpha d \end{pmatrix} \times Q$$

   (f) En choisissant bien M montrer que $\det(P) \times \det(Q) = 1$, puis que $\alpha = 1$.
   Exprimer alors φ en fonction de u ou v (définis initialement).
8. On suppose que (X_1, X_2) est liée.
   (a) En déduire qu'il existe $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Y}' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\varphi(E_1) = \overline{X} \times \overline{Y}^T \qquad \varphi(E_2) = \overline{X} \times (\overline{Y}')^T$$

   (b) De même montrer qu'il existe $\overline{X}' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(E_3) = \overline{X}' \times \overline{Y}^T$.
   On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde
   (c) En déduire qu'il existe P et Q (que l'on donnera en fonction de $\overline{X}$, $\overline{X}'$, $\overline{Y}'$ et $\overline{Y}$) telles que

$$\varphi : M \mapsto P \times M \times Q \qquad \text{et} \qquad \det(P) \times \det(Q) = 1$$

9. Réciproquement, montrer que pour toute matrice P, Q inversibles telles que $\det(P)\det(Q) = 1$, $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ conservent bien le déterminant.

III. Endomorphismes qui conserve le polynôme caractéristique

A toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe un polynôme (le polynôme caractéristique de M) défini par :

$$\chi_M : \lambda \mapsto \det(\lambda I_n - M)$$

Soit Φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui conserve le polynôme caractéristique, c'est-à-dire tel que

$$\forall\ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \qquad \chi_{\Phi(M)} = \chi_M$$

1. Etude d'un exemple.
   Considérons $\psi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M \longmapsto \operatorname{tr}(M) I_2 - M$.
   (a) Montrer que ψ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Vérifier que ψ conserve le polynôme caractéristique.
2. Retour au cas général : Φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui conserve le polynôme caractéristique.
   (a) Montrer que Φ conserve le déterminant et la trace.
   (b) En déduire qu'il existe un couple (P, Q) d'éléments de $GL_2(\mathbb{R})$ tel que $\Phi = u_{P,Q}$ ou $\Phi = v_{P,Q}$.
   (c) Un tel couple (P, Q) ayant été considéré.
   Montrer alors que pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(PMQ) = \operatorname{tr}(M)$
   (d) En déduire que $Q = P^{-1}$
   (On pourra utiliser le résultat trouvé en I.2.(b) avec $A = QP - I_2$)
3. Préciser alors les endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui conservent le polynôme caractéristique.
4. Retour sur l'exemple : expliciter une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $\psi = v_{P,P^{-1}}$