

Devoir à la maison n°10

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'énoncé des **formules utilisées**.

Exercice

On cherche à dénombrer le nombre de colliers à 10 perles, selon les couleurs des perles. Dans l'ensemble de l'exercice on considérera

- $E = \{x_1, \dots, x_{10}\}$ un ensemble à 10 éléments,
- σ la permutation définie par
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
- c , le cycle $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10)$.
- Si $\ell = (x_{i_1}, \dots, x_{i_{10}})$ est une liste d'éléments distincts de E (permutation),
on note, pour toute permutation s de $\mathbb{N}_{10} : s \cdot \ell = \ell' = (x_{s(i_1)}, \dots, x_{s(i_{10})})$

On repère

1. Si les 10 perles sont de couleurs différentes, combien de colliers différents existent-ils ?
On pourra d'abord démontrer que deux permutations ℓ_1 et ℓ_2 de E représente un même collier si et seulement si $\exists p \in \{0, 1, \dots, 9\}$ tel que $\ell_1 = (c^p) \cdot \ell_2$ ou $\ell_1 = (\sigma \times c^p) \cdot \ell_2$
2. Combien de colliers différents s'il y a 5 perles noires et 5 perles blanches ?
3. Combien de colliers différents s'il y a 1 perle rouge, 2 perles bleues, 3 perles jaunes et 4 perles vertes ?

On pourra s'aider du DS 8 de la saison 2016-2017, ou bien d'internet : « lemme de Burnside ». **Les formules exploitées doivent être démontrées** (au moins dans le contexte local) !

Problème : le nombre de n -combinaison

Une serrure de sécurité possède n boutons numérotés de 1 à n ($n \geq 1$).

Une « combinaison » consiste à pousser dans un certain ordre **tous** les boutons. Chaque bouton n'est poussé qu'**une seule** fois mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons.

La modélisation est effectuée de la manière suivante : pour une valeur donnée de l'entier n , soit A_n l'ensemble des entiers de 1 à n : $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Par définition une n -combinaison est une liste ordonnée $(P_1, P_2, \dots, P_j)$ de j parties $P_1, P_2, \dots, P_j$ de l'ensemble A_n , ($1 \leq j \leq n$) ; ces parties P_i , $1 \leq i \leq n$, de A_n sont deux à deux disjointes et différentes de la partie vide ; leur réunion est Égale à A_n .

Soit a_n le réel égal au nombre de n -combinaisons.

Exemples :

- $n = 1$: une seule 1-combinaison : $(\{1\})$. Donc $a_1 = 1$.
- $n = 2$: il y a trois 2-combinaisons : $(\{1\}, \{2\})$; $(\{2\}, \{1\})$; $(\{1, 2\})$.

La première 2-combinaison consiste à appuyer d'abord sur le bouton 1 puis sur le bouton 2, la deuxième à appuyer d'abord sur le 2 puis sur le 1, la troisième à appuyer simultanément sur les boutons 1 et 2. Donc $a_2 = 3$.

A. Premiers exemples

Le but de cette partie est de donner quelques exemples.

1. Pour une valeur de l'entier n donné, quel est le nombre de n -combinaisons telles que les boutons soient poussés l'un après l'autre ? (les parties P_i , $1 \leq i \leq n$, sont toutes des singletons).
2. Déterminer, lorsque l'entier n est égal à 3, en explicitant chacune des suites possibles, le nombre a_3 des 3-combinaisons.

Les singletons $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$ peuvent être désignés brièvement par 1, 2 et 3. Par exemple : $(1, 3, 2)$ désigne la 3-combinaison dans laquelle les boutons sont poussés successivement dans l'ordre 1, 3, 2 ; $(\{1, 3\}, 2)$ est la suite dans laquelle les deux boutons 1 et 3 sont poussés simultanément avant que le bouton 2 ne soit enfoncé.

B. Relation de récurrence

Le but de cette partie est d'établir une relation de récurrence vérifiée par les réels a_n , $n \geq 1$.

L'entier n est supérieur ou égal à 1. Soit S une n -combinaison quelconque ; S est une suite ordonnée $(P_1, P_2, \dots, P_j)$ de j parties $P_1, P_2, \dots, P_j$ de l'ensemble A_n , deux à deux disjointes, non vides, dont la réunion est égale à A_n ($1 \leq j \leq n$).

1. Combien y a-t-il de choix possibles pour la partie P_1 lorsque le nombre d'éléments de P_1 est k ?
2. Soit k un entier strictement inférieur à n ($k < n$) ; pour une partie P_1 fixée possédant k éléments, combien y a-t-il de n -combinaisons S ?
Exprimer le résultat à l'aide du réel a_p , pour une valeur convenable de l'entier p .
Montrer que le résultat reste juste pour $k = n$ si l'on considère que $a_0 = 1$.
3. Le but de cette question est d'établir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(a_p)_{p \geq 1}$. Exprimer d'abord le réel a_n , en fonction des réels a_k , $1 \leq k \leq n$, puis en fonction des réels a_p , $0 \leq p \leq n-1$ (en posant $p = n-k$).
Retrouver les valeurs obtenues ci-dessus pour a_2 et a_3 .
4. Soit $(b_p)_{p \geq 0}$ la suite des réels définis par la relation : pour tout entier naturel n , $b_n = \frac{a_n}{n!}$.

Démontrer que ces réels b_p , $p \geq 0$, vérifient la relation de récurrence : $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{b_{n-k}}{k!}$.

C. Majoration des réels b_n

Dans cette partie nous essayons de majorer la valeur de b_n et de a_n avec des fonctions usuelles.

1. On note $f_n : x \mapsto e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$.
 - (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, que vaut $f_n(0)$?
 - (b) Montrer que f_n est dérivable. Quelle est la relation entre f'_n et f_{n-1} ?
 - (c) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $x \geq 0$, $f_n(x) \geq 0$.
En déduire que $e^{\ln 2} \geq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^k}{k!}$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n , $b_n \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}$. On utilisera une récurrence forte.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une majoration de a_n avec des suites usuelles ($n!$ et géométrique).
4. En approchant $\ln 2 (= 0,6931\dots)$ par $2^{2,8} \times 10^{-1} (= 0,6964\dots)$, majorer la valeur de a_{10} .

D. Expression de a_n à l'aide d'une série infinie

On considère la fonction $f :]-\infty, \ln 2[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2 - e^x}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, \ln 2[$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ converge dès que $x < \ln 2$.
2. Etude de f
 - (a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, \ln 2[$, $e^x f(x) = 2f(x) - 1$.
 - (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]-\infty, \ln 2[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)$$

3. En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de $f^{(n)}(0)$
4. On note pour tout $x \in]-\ln 2, \ln 2[$, $u_k(x) = \frac{e^{kx}}{2^{k+1}}$.

- (a) Montrer que $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge.

Exprimer la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ en fonction de f .

- (b) On admet ici que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^{(n)}(x)$.

En déduire une expression de a_n sous la forme d'une somme d'une série convergente.

- (c) En déduire que $a_3 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{2^{k+1}}$.

En remarquant que $k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k$, retrouver la valeur de a_3 à l'aide de la série précédente (et des séries binômes négatives ou géométriques dérivées)