MPSI 3 - Fermat Le 09.05.18
2017-2018

Devoir surveillé n°9

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice d'algèbre et d'un problème d'analyse.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice. Autour de l'application $(u, v) \mapsto u \circ v - v \circ u$ $\approx$ **80 min.**

On considère E un espace vectoriel défini sur $\mathbb{K}$ de dimension finie égale à n.
On note $u \in \mathcal{L}(E)$, une application linéaire définie sur E non nul et tel que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

1. Calculer dim(Ker (tr)).
2. (a) Démontrer que u n'est pas une homothétie vectorielle de E.
   (b) Montrer alors qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ libre.
   (c) Soit $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ est une famille libre.
   On note $\Delta_x = \mathrm{vect}(x)$ et F un supplémentaire de Δ_x contenant $u(x)$.
   Enfin, on note p_F, la projection sur F parallèlement à Δ_x.
   Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall\, y \in F$, $v(y) = p_F(u(y))$.
   Démontrer que $\mathrm{tr}(v) = 0$
   (d) En déduire par récurrence sur la dimension de E, l'existence d'une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.
3. Soit D, une matrice carrée d'ordre n diagonale avec pour coefficients sur la diagonale : $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$.
   Soit $\Psi_D : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); M \mapsto DM - MD$.
   (a) Démontrer que Ψ_D est une application linéaire et déterminer son noyau.
   (b) Démontrer que Ker (Ψ_D) est l'ensemble des matrices d'ordre n diagonales si et seulement si les (α_i) sont deux à deux distincts.
   Et dans ce cas, démontrer que Im $(\Psi_D) = \{(m_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall\, i \in \mathbb{N}_n, m_{i,i} = 0\}$
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, déduire de ce qui précède la propriété suivante :
   $$\mathrm{tr}(u) = 0 \Longleftrightarrow \exists\ (v, w) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), u = v \circ w - w \circ v$$
5. (a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = u \circ v - v \circ u$.
   Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $ku^k = u^k \circ v - v \circ u^k$.
   (b) Soit $h : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $w \mapsto w \circ v - v \circ w$.
   Montrer que l'application $p_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \det(h - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)})$ est une application polynomiale de degré n^2.
   On rappelle que E est de dimension n.
   (c) Déduire des questions précédentes que si $u^{n^2} \neq 0$, alors p_h admet au moins $n^2 + 1$ racines.
   Conclure.

Problème. Théorème de convergence monotone

Ce problème est composée de trois parties. Dans la première partie, assez calculatoire, on étudie les intégrales de Wallis. Cela nous donne un résultat numérique qui sera utilisé en partie C. Dans la deuxième partie, plus théorique, on démontre le théorème de convergence monotone (Théorème de Beppo Levi) pour l'intégrale de Kurzweil-Henstock. On applique ce théorème en partie C pour obtenir une expression de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$.
On a besoin de la définition suivante (pour les parties B et C) :

> Soit $a \in \mathbb{R}$.
> On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $[a, +\infty[$ est KH-intégrable sur $[a, +\infty[$, si
> $$\forall\, b > a, f \text{ est KH-intégrable sur } [a, b] \quad \text{et} \quad \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ existe}$$
> Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ cette limite.

A. Intégrale de Wallis $\approx$ **40 min.**

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$.
   En déduire I_{n+2} en fonction de I_n.
4. En déduire, pour tout entier naturel p, la valeur de I_{2p} et de I_{2p+1} à l'aide de factorielles et de puissances de 2.
5. Établir pour tout entier naturel n l'encadrement : $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.
6. A l'aide des réponses aux questions 3 et 5, montrer que $I_{n+1} \sim I_n$.
7. En déduire
$$\lim_{p\to+\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{[(2p)!]^2 p} = \pi$$
   puis la limite de $\sqrt{n} I_{2n+1}$.

B. Théorème de convergence monotone $\approx$ **60 min.**

Dans cette partie, on démontre le théorème de convergence dominée (appelé aussi théorème de Beppo-Levi) sur un intervalle du type $[a, +\infty[$. On commence par établir le théorème sur les segments bornées $[a, b]$ avant de généraliser.

1. Soit une suite de fonctions (f_n) définie sur $[a, b]$, KH-intégrable sur $[a, b]$. On suppose que
   - cette suite est croissante, c'est-à-dire : $\forall\, x \in [a, b], \forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
   - cette suite est convergente vers une fonction f sur $[a, b]$: $\forall\, x \in [a, b], \forall\, n \in \mathbb{N},\ \big(f_n(x)\big)_n \to f(x)$
   - la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M (indépendante de n).

   On fixe $\epsilon > 0$. Les premières questions permettent surtout ici de s'accorder sur les notations.

   (a) On note $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que (I_n) est convergente. On note I sa limite.
   Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0,\ I - \epsilon \leqslant I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I$

   (b) Montrer : pour tout $x \in [a, b]$, il existe $N(x) \geqslant n_0$ tel que $\forall\, n \geqslant N(x),\ f(x) - \epsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$

   (c) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de δ_n, jauge sur $[a, b]$ tel que
   $\forall\, \mathcal{P} = \big(([x_0, x_1], t_1), \dots ([x_{p-1}, x_p], t_p)\big)$ δ_n-fine, $|S(f_n, \mathcal{P}) - I_n| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2^n}$.

   (d) Soit h, KH-intégrable sur $[a, b]$.
   Soit $\epsilon > 0$ et δ une jauge sur $[a, b]$ tel que $\forall\, \mathcal{P}$, δ-fine, $|S(h, \mathcal{P}) - \displaystyle\int_a^b h(t)\mathrm{d}t| \leqslant \epsilon$.
   On considère trois familles $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$, $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ telles que :
   — (a_i), (b_i) et (x_i) sont croissantes, à valeurs dans $[a, b]$
   — $\forall\, i \in \mathbb{N}_q,\ x_i - \frac{\delta(x_i)}{2} \leqslant a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \leqslant x_i + \frac{\delta(x_i)}{2}$
   — $\forall\, i \in \mathbb{N}_{q-1},\ ]a_i, b_i[\bigcap]a_{i+1}, b_{i+1}[= \emptyset$
   montrer le lemme d'Henstock :
$$\sum_{i=1}^{q} \left| f(x_i)(b_i - a_i) - \int_{a_i}^{b_i} f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant 2\epsilon$$

   (e) (*) On considère alors $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*,\ x \mapsto \delta_{N(x)}(x)$.
   Montrer, avec δ, que f est intégrable sur $[a, b]$ et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = I$
   On pourra commencer par écrire, pour $\mathcal{P} = \big(([x_0, x_1], t_1), \dots ([x_{p-1}, x_p], t_p)\big)$, *$\delta$-fine :*
$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k)) + \sum_{k=1}^{p} \left((x_k - x_{k-1}) f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)dt \right) + \sum_{k=1}^{p} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)dt$$

2. Sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
   Soit une suite de fonctions (f_n) définie sur $[a, +\infty[$, KH-intégrable sur $[a, +\infty[$. On suppose que
   - cette suite est croissante, c'est-à-dire : $\forall\, x \in [a, +\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
   - cette suite est convergente vers f sur $[a, +\infty[$: $\forall\, x \in [a, +\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \big(f_n(x)\big)_n \to f(x)$
   - la suite $\left(\int_a^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M (indépendante de n).

(a) Soit $b > 0$. Montrer que l'on peut appliquer le théorème de convergence monotone à $((f_n - f_0)_{|[a,b]})_n$.

(b) En déduire le théorème de convergence monotone (Beppo Levi) sur tout intervalle de type $[a, +\infty[$.

3. Quel théorème cela donne si on remplace, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n par $-g_n$?

C. Calcul de l'intégrale de Gauss $\approx$ **60 min.**

On note $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

On commence par montrer que ce calcul a un sens, puis à l'aide du théorème de convergence dominée on obtient sa valeur exacte.

On considère pour cette partie :

$$\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases}$$

1. Montrer que φ est HK-intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. On considère $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la fonction f_n est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.
   (b) Par un changement de variable bien choisie et justifié, montrer que
   $$\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\mathrm{d}t$$
   (c) En déduire, avec l'aide de la partie A, la valeur de
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \quad ?$$
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \varphi(x)$.
4. Croissance de $\big(f_n(x)\big)_n$.
   (a) Montrer que pour tout $a, b \geqslant 0$, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.
   En déduire par récurrence :
   $$\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \forall\, (a_1, a_2, \dots a_{2^m}) \in (\mathbb{R}_+)^{2^m} \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{2^m} a_i}{2^m} \geqslant \sqrt[2^m]{\prod_{i=1}^{2^m} a_i} \qquad \text{(IAG)}$$
   (b) Soient $x \in \mathbb{R}_+$, et $n \geqslant x^2$.
   On considère $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$ ($m = \lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \rfloor$)
   Enfin, on définie la familles $(a_i)_{1\leqslant i \leqslant 2^m}$ par
   — $a_1 = \cdots = a_n = 1 - \frac{x^2}{n}$,
   — $a_{n+1} = 1$,
   — $a_{n+2} = \cdots = a_{2^m} = 1 - \frac{x^2}{n+1}$.
   En appliquant l'inégalité (IAG) précédente, montrer que
   $$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \left(1 - \frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1}$$
   (c) En déduire que la suite $\big(f_n(x)\big)_n$ est croissante (x est fixé).
5. En exploitant la partie B, montrer que
   $$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$$
6. En déduire que $G = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$