Devoir surveillé n°9
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrment) selon la qualité des copies.

Exercice. Autour de l'application $(u, v) \mapsto u \circ v - v \circ u$

1. Tout simplement, comme tr est une forme linéaire, son noyau est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$.
Par conséquent,
$$\boxed{\dim(\text{Ker }(\text{tr})) = \dim\big(\mathcal{L}(E)\big) - 1 = n^2 - 1}$$ /1

Piste de recherche...
Voyons une autre démonstration qui permet de trouver une base de cet espace Ker tr.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\text{tr}(u) = \text{tr}\big(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\big)$.
Nous allons plutôt étudier le noyau de la trace définie sur les matrices que sur les endomorphismes. Par l'isomorphisme $u \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, on aura l'égalité des dimensions.
Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$$M \in \text{Ker }(\text{tr}) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = 0 \Longleftrightarrow m_{n,n} = -\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}.$$
Or $M = (m_{i,j})$ signifie $M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}E_{i,j}$ où $(E_{i,j})$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Par conséquent :
$$M \in \text{Ker }(\text{tr}) \Longleftrightarrow M = \sum_{i \neq j} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}E_{i,i} + \underbrace{(-m_{1,1} - m_{2,2} - \dots m_{n-1,n-1})}_{=m_{n,n}} E_{n,n}$$
$$M \in \text{Ker }(\text{tr}) \Longleftrightarrow M = \sum_{i \neq j} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}(E_{i,i} - E_{n,n})$$
Et donc
$$M \in \text{Ker }(\text{tr}) \Longleftrightarrow M \in \text{vect}\big(E_{1,1} - E_{n,n}; E_{2,2} - E_{n,n}; \dots E_{n-1,n-1} - E_{n,n}; (E_{i,j})_{i\neq j}\big)$$
Nous avons ainsi une famille génératrice de Ker tr.
Elle est composée de $(n-1) + n(n-1) = n^2 - 1$ éléments.
Comme la famille $(E_{i,j})$ est une base, elle est libre. En exploitant cela, on montre que la famille génératrice précédente est également libre.
Il s'agit donc d'une base de Ker tr, *et donc* $\underline{\dim(\text{Ker }(\text{tr})) = n^2 - 1}$

2. (a) Si u était une homothétie vectorielle, alors il existerait $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda id_E$.
Et donc $\text{tr}(u) = \lambda\text{tr}(\text{id}_E) = n\lambda$.
Ainsi comme $\text{tr}(u) = 0$, on aurait $\lambda = 0$ et donc $u = 0$.
Or u est non nul, donc
$$\boxed{u \text{ n'est pas une homothétie vectorielle de } E.}$$ /1

(b) Supposons que pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ n'est pas libre,
alors pour tout x non nul, il existe λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$.
Comme u n'est pas une homothétie, il existe $x, y \in E$ non nuls tel que $\lambda_x \neq \lambda_y$.
Nécessairement (x, y) est libre, sinon, $x = ky$ (ou inversement)
et par linéarité $\lambda_x x = u(x) = ku(y) = \lambda_y ky = \lambda_y x$.
et donc $\lambda_x = \lambda_y$, ce qui est absurde ($x \neq 0$).
Notons $z = x + y$.
Alors $u(z) = u(x + y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$.
Par ailleurs $u(z) = \lambda_z z = \lambda_z(x + y) = \lambda_z x + \lambda_z y$.
Ainsi, $(\lambda_x - \lambda_z)x + (\lambda_y - \lambda_z)y = 0$.
Or la famille (x, y) est libre, donc $\lambda_x = \lambda_z$ et $\lambda_z = \lambda_y$, contradiction.
Ainsi,
$$\boxed{\text{il existe } x \in E \text{ tel que } (x, u(x)) \text{ libre.}}$$ /2

(c) Soit $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ est une famille libre.
On note $\Delta_x = \text{vect}(x)$ et F un supplémentaire de Δ_x contenant $u(x)$.
Il existe $\mathcal{B}' = (x_2, x_3 \dots, x_n)$ base de F. Et alors, $\overline{\mathcal{B}'} = (x, \mathcal{B}')$ est une base de E.
Par suite, la matrice de u dans la base $\overline{\mathcal{B}'}$ est

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{B}'}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & ? & \cdots & ? \\ ? & & & \\ \vdots & & \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v) & \\ ? & & & \end{pmatrix}$$

car l'image de x (1^{er}vecteur de $\overline{\mathcal{B}'}$) appartient à $F = \text{vect}(\mathcal{B}')$.
Puis,

$$\text{tr}(u) = \text{tr}\left(\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{B}'}}(u)\right) = 0 + \text{tr}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v)\right) = \text{tr}(v)$$

Donc

$$\boxed{\text{tr}(v)(= \text{tr}(u)) = 0}$$

/2,5

(d) Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$\mathcal{P}_n$: « si $\dim(E) = n$, alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{tr}(u) = 0$, il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls. »

— Soient E de dimension 1 et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $x \in E$, non nul, alors (x) est une base de E.
En écrivant la matrice de u dans la base (x), on voit que $u(x) = \text{tr}(u)x$.
Donc si $\text{tr}(u) = 0$, la matrice de u dans la base (x) est nulle.
Par conséquent $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Soit E un espace vectoriel de dimension $(n+1)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{tr}(u) = 0$.
D'après la question précédente,
il existe x, F, de dimension : $\dim(E) - 1 = n$
et $v \in \mathcal{L}(F)$ tels que $\text{tr}(v) = 0$ et $u(x) \in F$.
On applique alors $\mathcal{P}_n$ à l'espace vectoriel F de dimension n.
Donc il existe $\mathcal{B}''$, base de F telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(v)$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.
Par suite $\overline{\mathcal{B}''} = (x; \mathcal{B}'')$ est une base de E,
et $\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{B}''}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & ? \\ ? & \mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(v) \end{pmatrix}$ a tous ses coefficients diagonaux nuls.
Par conséquent, $\mathcal{P}_{n+1}$ est démontrée.

On a ainsi démontrer que :

/2

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout espace vectoriel } E \text{ de dimension finie, pour tout endomorphisme } u \text{ de } E \text{ de trace nulle,} \\ \text{il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ telle que la matrice de } u \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.}\end{array}}$$

3. (a) Pour tout $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) &= D(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) - (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)D \\ &= \lambda_1(DM_1 - M_1 D) + \lambda_2(DM_2 - M_2 D) = \lambda_1 \Psi_D(M_1) + \lambda_2 \Psi_D(M_2)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\Psi_D \text{ est une application linéaire de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

$$M \in \text{Ker } \Psi_D \Longleftrightarrow DM - MD = 0 \Longleftrightarrow DM = MD$$

Rappelons que si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, alors $A \times B = (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j})_{i,j}$.

Donc si $M = (m_{i,j})$, alors $D \times M = (\sum_{k=1}^{n} d_{i,k} m_{k,j})_{i,j} = (\alpha_i m_{i,j})_{i,j}$, car $d_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ \alpha_i & \text{si } k \neq i \end{cases}$

et $M \times D = (\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} d_{k,j})_{i,j} = (\alpha_j m_{i,j})_{i,j}$, car $d_{k,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \alpha_j & \text{si } k \neq j \end{cases}$

Par conséquent,

$$M = (m_{i,j}) \in \text{Ker } \Psi_D \Longleftrightarrow \forall\, i,j \in \mathbb{N}_n\ \alpha_i m_{i,j} = \alpha_j m_{i,j} \Longleftrightarrow \forall\, i,j \in \mathbb{N}_n\ (\alpha_i - \alpha_j) m_{i,j} = 0$$

Comme nous avons raisonner par équivalence, nous avons donc démontré une égalité d'ensemble (et non juste une inclusion).

/1,5

$$\boxed{\text{Ker } \Psi_D = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid m_{i,j} = 0 \text{ dès que } \alpha_i \neq \alpha_j\}}$$

(On remarquera que les matrices diagonales, en particulier, appartiennent à Ker Ψ_D.)

(b) D'après la question précédente, Ker (Ψ_D) est l'ensemble des matrices d'ordre n diagonales
si et seulement si les matrices M de Ker (Ψ_D) vérifient : $\forall\ i,j \in \mathbb{N}_n,\ m_{i,j} = 0$,
si et seulement si $\forall\ i,j \in \mathbb{N}_n,\ \alpha_i \neq \alpha_j$.
Donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ker } (\Psi_D) \text{ est l'ensemble des matrices d'ordre } n \text{ diagonales} \\ \text{si et seulement si les } (\alpha_i) \text{ sont deux à deux distincts.}\end{array}}$$ /1

Par ailleurs, on sait que Im $\Psi_D = \text{vect}\big((\Psi_D(E_{i,j})_{i,j}\big)$.

Or $\Psi_D(E_{i,j}) = (\alpha_i - \alpha_j)E_{i,j} \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{si } i = j \\ \in \text{vect}(E_{i,j}) & \text{si } i \neq j \end{array} \right.$.

Donc

$$\boxed{\text{Im } \Psi_D = \text{vect}\big((E_{i,j})_{i\neq j}\big) = \{(m_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall\ i \in \mathbb{N}_n, m_{i,i} = 0\}}$$ /1

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$,
Si $\exists\ (v,w) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), u = v \circ w - w \circ v$,
alors $\text{tr}(u) = \text{tr}(vw) - \text{tr}(wv)$, par linéarité de la trace
puis $\text{tr}(u) = \text{tr}(vw) - \text{tr}(vw) = 0$. /1
Réciproquement, si $\text{tr}(u) = 0$,
alors d'après 2., il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ a ses coefficients diagonaux nuls.
donc avec $D = \text{diag}(1, 2, \dots n)$, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \text{Im } \Psi_D$.
Ainsi, il existe N tel que $M = \Psi_D(N) = DN - ND$.
Enfin, en notant v l'endomorphisme tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = D$
et w l'endomorphisme tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w) = N$,
alors $u = v \circ w - w \circ v$. /2
Par conséquent

$$\boxed{\text{tr}(u) = 0 \Longleftrightarrow \exists\ (u,v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), u = v \circ w - w \circ v}$$

5. (a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = u \circ v - v \circ u$.
On fait la démonstration par récurrence, en notant que pour $k = 0$, le résultat est vraie : $0 = \text{id} \circ v - v \circ \text{id}$ Soit $k \in \mathbb{N}$,on suppose que $ku^k = u^k \circ v - v \circ u^k$.
Alors en composant par u à gauche : $ku^{k+1} = u^{k+1}v - uvu^k = u^{k+1}v - (u + vu)u^k = u^{k+1}v - u^{k+1} - vu^{k+1}$.
Ainsi, $(k+1)u^{k+1} = u^{k+1}v - vu^{k+1}$ et donc la relation est vraie au rang suivant.
/1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout entier } k \in \mathbb{N},\ ku^k = u^k \circ v - v \circ u^k.}$$

(b) Soit $h : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E),\ w \mapsto w \circ v - v \circ w$.
E est de dimension n, donc $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2.
On peut considérer une base quelconque $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h) = (h_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}_{n^2}}$. Alors

$$p_h(\lambda) = \sum_{\sigma\in S_{n^2}} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n^2} (h_{i,\sigma(i)} - \lambda\delta_{i,\sigma(i)})$$

Il s'agit donc d'un produit de monôme en λ de degré 0 ou 1. Il y a n^2 monôme de degré 1.
/2

$$\boxed{p_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \lambda \mapsto \det(h - \lambda\text{id}_{\mathcal{L}(E)}) \text{ est une application polynomiale de degré } n^2.}$$

(c) Supposons que $u^{n^2} \neq 0$, donc pour tout $k \leqslant n^2$, $u^k \neq 0$ (par l'absurde).
On a alors $h(u^k) = u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$, donc $u^k \in \text{Ker } (h - k\text{id}_{\mathcal{L}(E)})$.
donc $h - k\text{id}_{\mathcal{L}(E)}$ n'est pas inversible et $\det(h - k\text{id}_{\mathcal{L}(E)}) = 0$, i.e. k est une racine de p_h.
Alors p_h admet au moins $n^2 + 1$ racines (de 0 à n^2). C'est impossible.
/2,5

$$\boxed{\text{Donc } u^{n^2} = 0 \text{ et donc } u \text{ est nilpotent}}$$

Remarques !
La réciproque est vraie : si u est nipoltente, alors il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = uv - vu$.
Et donc $\text{tr}(u) = 0$ et même pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{tr}(u^k) = 0$.
Mais ce sera pour une autre fois...

Problème. Théorème de convergence monotone

A. Intégrale de Wallis

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x$

1. /1

$$\boxed{I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$$

2. On considère $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$, bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $t \mapsto -1$. /1,5
   On peut donc faire le changement de variable $u = t - \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\sin(\frac{\pi}{2} - u)\right)^n (-\mathrm{d}u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t}$$

3. On considère les fonctions $u : t \mapsto -\cos t$ et $v : t \mapsto \sin^{n+1} t$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = (n+1)\cos t \sin^n t$.
   On pratique une intégration par parties :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)\times v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \left[\cos t \sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\mathrm{d}t$$

   Et donc comme $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$; /1,5

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} = (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t\mathrm{d}t\right) = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}}$$

   On a donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, ou encore /1

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$$

4. Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{I_{2(p+1)}}{I_{2p}} = \frac{2p+1}{2p+2}$$

   Puis par télescopage (multiplicatif) :

$$\frac{I_{2p}}{I_0} = \prod_{h=0}^{p-1} \frac{I_{2(h+1)}}{I_{2h}} = \prod_{h=0}^{p-1} \frac{2h+1}{2h+2} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)} = \frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(2p-1)\times 2p}{(2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p))^2}$$

   En ajoutant les multiplications des termes pairs en haut et en bas, plus simples à exprimer :

$$2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p) = (2\times 1)\times(2\times 2)\times(2\times 3)\times\cdots(2\times p) = 2^p\times p!$$

   Ainsi /1,5

$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} I_0 = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2}\frac{\pi}{2}}$$

   Et de même (et plus rapidement) :

$$I_{2(p+1)+1} = I_{2p+1} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{I_{2(p+1)+1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+2}{2p+3}$$

   Puis par télescopage (multiplicatif) :

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1} = \prod_{h=0}^{p-1} \frac{I_{2(h+1)+1}}{I_{2h+1}} = \prod_{h=0}^{p-1} \frac{2h+2}{2h+3} = \frac{2\times 4\times\cdots\times(2p)}{3\times 5\times\cdots\times(2p+1)} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}$$

   Et ainsi, comme $I_1 = 1$, /1,5

$$\boxed{I_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}}$$

5. Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la suite $(\sin^n(t))_n$ est décroissante (car $\sin t \in [0,1]$).
Donc pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin^{n+2}(t) \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$.
Puis par intégration sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, (croissante) :

/1

$$\boxed{I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n}$$

6. On sait que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$, donc en divisant tout par $I_n \neq 0$:

$$\frac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \Longrightarrow \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

Le théorème de convergence par encadrement donne

/1,5

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 \qquad \text{donc} \qquad I_{n+1} \sim I_n}$$

7. On a donc pour $n = 2p$ t d'après les calculs précédents :

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}{\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}} = \frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p+1)[(2p)!]}\frac{2}{\pi} = \frac{2^{4p}(p!)^4}{p[(2p)!]} \times \frac{2p}{2p+1} \times \frac{1}{\pi}$$

Et comme cette limite vaut 1, ainsi que $\lim_p \frac{2p}{2p+1}$, on a donc

/1,5

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{[(2p)!]^2 p} = \pi}$$

$$\left(\sqrt{n} I_{2n+1}\right)^2 = n\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n+1)^2[(2n)!]^2} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^2 \times \frac{2^{4n}(n!)^4}{n[(2n)!]^2} \longrightarrow \frac{1}{4} \times \pi$$

Et donc en prenant la racine carrée de cette limite

/2

$$\boxed{\sqrt{n} I_{2n+1} \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

B. Théorème de convergence monotone

Dans cette partie, on démontre le théorème de convergence dominée (appelé aussi théorème de Beppo-Levi) sur un intervalle du type $[a, +\infty[$.
On commence par établir le théorème sur les segments bornées $[a, b]$ avant de généraliser.

1. Soit une suite de fonctions (f_n) définie sur $[a, b]$, KH-intégrable sur $[a, b]$. On suppose que
   - cette suite est croissante, c'est-à-dire : $\forall\, x \in [a, b], \forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
   - cette suite est convergente vers une fonction f sur $[a, b]$: $\forall\, x \in [a, b], \forall\, n \in \mathbb{N},\ \left(f_n(x)\right)_n \to f(x)$
   - la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M (indépendante de n).

   On fixe $\epsilon > 0$. Les premières questions permettent surtout ici de s'accorder sur les notations.

   (a) La suite de fonction (f_n) est croissante, donc, pour tout $x \in [a, b]$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
   En intégrant sur $[a, b]$, par positivité :

$$I_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f_{n+1}(t)\mathrm{d}t = I_{n+1}$$

   La suite (I_n) est donc croissante, par hypothèse elle est majorée, donc

   /1

$$\boxed{(I_n) \text{ est convergente}}$$

   On note I sa limite. L'existence de n_0 découle alors de la définition de $(I_n) \nearrow I$:

   /1

$$\boxed{\text{il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geqslant n_0,\ I - \epsilon \leqslant I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I}$$

   (b) Soit $x \in [a, b]$. La suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$.
   Par définition, il existe N (qui dépend de x) tel que $\forall\, n \geqslant N$, $|f_n - f(x)| \leqslant \epsilon$
   Donc pour $n \geqslant N$, $f(x) - \epsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) + \epsilon$.
   Mais, comme par ailleurs, $f_n(x)$ est croissante, $f_n(x) \leqslant f(x)$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   /1

$$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in [a, b], \text{ il existe } N(x) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N(x),\ f(x) - \epsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)}$$

(c)

$$\boxed{\text{La jauge } \delta_n \text{ existe bien, car } f_n \text{ est KH-intégrable sur } [a,b]}$$

On la choisit avec $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2^n}$. /1

$\forall\ \mathcal{P} = \big(([x_0,x_1],t_1),\dots([x_{p-1},x_p],t_p)\big)$ δ_n-fine, $|S(f_n,\mathcal{P}) - I_n| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2^n}$.

(d) Soit h, KH-intégrable sur $[a,b]$.
Soit $\epsilon > 0$ et δ une jauge sur $[a,b]$ tel que $\forall\ \mathcal{P}$, δ-fine, $|S(h,\mathcal{P})| \leqslant \epsilon$.
On considère trois familles $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$, $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ telles que :
— (a_i), (b_i) et (x_i) sont croissantes, à valeurs dans $[a,b]$
— $\forall\ i \in \mathbb{N}_q$, $x_i - \frac{\delta(x_i)}{2} \leqslant a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \leqslant x_i + \frac{\delta(x_i)}{2}$
— $\forall\ i \in \mathbb{N}_{q-1}$, $]a_i,b_i[\cap]a_{i+1},b_{i+1}[=\emptyset$

Piste de recherche...
Le théorème de Chasles nous donne envie d'étudier directement sur les intervalles $[a_i,b_i]$, ce qui créera une certaine jauge et on risque d'avoir du mal à revenir à la jauge δ initiale. Il faut se concentrer sur les parties complémentaires.

On note $b_0 = a$ et $a_{q+1} = b$, afin d'uniformiser les notations.
D'après la relation de Chasles, h est intégrable sur $[b_i,a_{i+1}]$ (pour $i \in [\![0,q]\!]$).
Soit δ_i une jauge sur $[b_i,a_{i+1}]$ tels que : $\forall\ \mathcal{P}_i$ δ_i-fine, $|S(h_{|[b_i,a_{i+1}]},\mathcal{P}_i) - \displaystyle\int_{b_i}^{a_{i+1}} h(t)\mathrm{d}t| \leqslant \dfrac{\epsilon}{q+1}$.

On note $\delta_i' = \min(\delta_i, \delta_{|[b_i,a_{i+1}]})$. Puis on considère $\mathcal{P}_i$, une subdivision δ_i'-fine.

Alors $\mathcal{P} = (\displaystyle\bigcup_{i=0}^{q} \mathcal{P}_i) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{q}([a_i,b_i],x_i)\right)$ est une subdivision δ-fine de $[a,b]$.

Donc

$$S(h,\mathcal{P}) - \int_a^b h(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{q} S(h_{|[b_i,a_{i+1}]},\mathcal{P}_i) - \int_{b_i}^{a_{i+1}} h(t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{q} |f(x_i)(b_i-a_i) - \int_{a_i}^{b_i} f(t)\mathrm{d}t$$

$$\left|\sum_{i=1}^{q} |f(x_i)(b_i-a_i) - \int_{a_i}^{b_i} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|S(h,\mathcal{P}) - \int_a^b h(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\sum_{i=0}^{q} S(h_{|[b_i,a_{i+1}]},\mathcal{P}_i) - \int_{b_i}^{a_{i+1}} h(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \left|S(h,\mathcal{P}) - \int_a^b h(t)\mathrm{d}t\right| + \sum_{i=0}^{q}\left|S(h_{|[b_i,a_{i+1}]},\mathcal{P}_i) - \int_{b_i}^{a_{i+1}} h(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \epsilon + (q+1)\frac{\epsilon}{q+1}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{q}\left|f(x_i)(b_i-a_i) - \int_{a_i}^{b_i} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\epsilon}$$ /3

(e) On considère alors $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \delta_{N(x)}(x)$.
Soit $\mathcal{P} = \big(([x_0,x_1],t_1),\dots([x_{p-1},x_p],t_p)\big)$, une subdivision δ-fine. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

/1

$$\begin{aligned}
|S(f,\mathcal{P}) - I| &= \Big|\sum_{k=1}^{p}(x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k)) + \sum_{k=1}^{p}\left((x_k - x_{k-1})f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t\right) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t - I\Big| \\
&\leqslant \Big|\sum_{k=1}^{p}(x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k)\Big| + \Big|\sum_{k=1}^{p}\left((x_k - x_{k-1})f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t\right)\Big| \\
&\qquad + \Big|\sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t - I\Big|
\end{aligned}$$

On va s'intéresser à chacun des morceaux, cela nous donnera une condition sur n...
— Pour le premier morceau :

/1

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p}|x_k - x_{k-1}|\epsilon = \epsilon\sum_{k=1}^{p}(x_k - x_{k-1}) = \epsilon(b-a)$$

— Pour le deuxième morceau :

$$\sum_{k=1}^{p}\left((x_k - x_{k-1})f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t\right)$$ /1,5

on reconnait p fois le lemme d'Henstock appliquée aux fonctions $f_{N(t_k)}$.
Or on peut avoir plusieurs fois une même fonction $f_{N(t_k)}$ (si $N(t_k) = N(t_h)$), on les regroupe donc ainsi, on trouve :

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\left((x_k - x_{k-1})f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t\right)\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty}\sum_{N(t_k)=n}\left|(x_k - x_{k-1})f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty}\sum_{N(t_k)=n}\left|(x_k - x_{k-1})f_n(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_n(t)\mathrm{d}t\right|$$

Or d'après le lemme d'Henstock et d'après la définition de la jauge δ_n associée à $\frac{\epsilon}{2^n}$:

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\left((x_k - x_{k-1})f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t\right)\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{\epsilon}{2^n} = \frac{\epsilon}{2^{n_0}(1-\frac{1}{2})} \leqslant 2\epsilon$$

— Pour le troisième morceau :
Pour tout k, $N(t_k) \geqslant n_0$, donc $f_{n_0}(t) \leqslant f_{N(t_k)}(t) \leqslant f(t)$, /1,5

$$I - I_{n_0} = I - \int_a^b f_{n_0}(t)\mathrm{d}t = I - \sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{n_0}(t)\mathrm{d}t \geqslant I - \sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Donc

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t - I\right| \leqslant I - I_{n_0} \leqslant \epsilon$$

Donc pour tout subdivision δ-fine, $|S(f,\mathcal{P}) - I| \leqslant [(b-a)+2+1]\epsilon$.
Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$

/1

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est intégrable sur } [a,b] \text{ et que } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = I}$$

2. Sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
Soit une suite de fonctions (f_n) définie sur $[a,+\infty[$, KH-intégrable sur $[a,+\infty[$. On suppose que
• cette suite est croissante, c'est-à-dire : $\forall\, x \in [a,+\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
• cette suite est convergente vers f sur $[a,+\infty[$: $\forall\, x \in [a,+\infty], \forall\, n \in \mathbb{N},\ \big(f_n(x)\big)_n \to f(x)$
• la suite $\left(\int_a^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M (indépendante de n).

   (a) Soit $b > 0$. On vérifie chacune des hypothèses (sans oublier la première) :
   • Par définition de la KH-intégrabilité sur $[a,+\infty[$ de f_n, nécessairement f_n est intégrable sur $[a,b]$, il en est de même de $f_n - f_0$ (addition). /1
   • Puis la suite $f_n - f_0$ est croissante sur $[a,b]$: /0,5

$$\forall\, x \in [a,b], x \in [a,+\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad f_n(x) - f_0(x) \leqslant f_{n+1}(x) - f_0(x)$$

   • Puis la suite $(f_n - f_0)$ est convergente vers $f - f_0$ sur $[a,b]$: /0,5

$$\forall\, x \in [a,b], x \in [a,+\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \big(f_n(x) - f_0(x)\big)_n \to f(x) - f_0$$

   • Enfin, la suite $\left(\int_a^b f_n(t) - f_0(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée :

$$\int_a^b f_n(t) - f_0(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} f_n(t) - f_0(t)$$

   car $f_n - f_0$ est positive, puisque la suite (f_n) est croissante
   et donc $\int_b^c f_n - f_0 \geqslant 0$, $\forall\, c > b$ (et $c \to +\infty$). Ainsi :

/2

$$\int_a^b f_n(t) - f_0(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} f_n(t) - \int_a^{+\infty} f_0(t) \leqslant M - \int_a^{+\infty} f_0(t)$$

$$\boxed{\text{On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à } ((f_n - f_0)_{|[a,b]})_n.}$$

(b) On a alors, pour tout $b > a$:

$f = \lim(f_n - f_0)$ est intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b (f - f_0) = \lim_n \left(\int_a^b f_n - f_0\right)$.

Puis, par positivité de $f_n - f_0$: $\displaystyle\int_a^b f_n - f_0 \leqslant M - \int_a^{+\infty} f_0$,

ainsi $\displaystyle\lim_n \left(\int_a^b f_n - f_0\right) \leqslant M - \int_a^{+\infty} f_0$

Donc la fonction $b \mapsto \displaystyle\lim_n \left(\int_a^b f_n - f_0\right)$ est bornée. /1,5

Et par ailleurs : si $b_1 < b_2$, $\displaystyle\int_a^{b_1} f_n - f_0 \leqslant \int_a^{b_2} f_n - f_0$ (positivité de $f_n - f_0$ sur $[b_1, b_2]$.)

Donc en passant à la limite sur n : $\displaystyle\lim_n \int_a^{b_1} f_n - f_0 \leqslant \lim_n \int_a^{b_2} f_n - f_0$.

Donc la fonction $b \mapsto \displaystyle\lim_n \left(\int_a^b f_n - f_0\right)$ est croissante. /1,5

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b (f - f_0)$ admet une limite pour $b \to +\infty$.

Puis par addition : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ admet une limite pour $b \to +\infty$, /1

$$\boxed{\text{et donc } f \text{ est KH-intégrable sur } [a, +\infty[.}$$

Remarques !

Avec le théorème de convergence monotone, on démontre le lemme de Fatou (en prenant les $\liminf$ *et* $\limsup$ *de fonctions). Puis arrive le théorème de convergence dominée. C'est le gros morceau du cours sur l'intégrale en seconde année.*
En règle générale, il est admis. Sa version pour les intégrales de Riemann est plus faible.
Ici, on a fait le gros du boulot avant de démontrer le théorème de convergence dominée (ou le théorème de convergence encadrée) pour les fonctions KH-intégrables sur des intervalles

3. On obtient alors le théorème suivant : /2

> Soit une suite de fonctions (g_n) définie sur $[a, +\infty]$, KH-intégrable sur $[a, +\infty]$. On suppose que
> • cette suite est décroissante : $\forall\, x \in [a, +\infty], \forall\, n \in \mathbb{N},\ g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x)$.
> • cette suite est convergente vers une fonction g sur $[a, +\infty[$: $\forall\, x \in [a, +\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \big(g_n(x)\big)_n \to g(x)$
> • la suite $\left(\int_a^b g_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est minorée par une constante M (indépendante de n).
> Alors g est intégrable sur $[a, +\infty[$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \lim_n \left(\int_a^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t\right)$

C. Calcul de l'intégrale de Gauss

1. La fonction $\varphi x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc admet une primitive Φ.
Et donc pour tout $b > 0$, $\displaystyle\int_0^b e^{-x^2}\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(0)$ a bien un sens.
Par ailleurs, $\Phi' = \varphi$ est positive, donc Φ est croissante. /1
Enfin, pour tout $x \geqslant 1$, $-x^2 \leqslant -x$, donc $\exp(-x^2) \leqslant \exp(-x)$.
Donc par croissance de l'intégrale :

$$\Phi(b) = \Phi(1) + \int_1^b e^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \Phi(1) + \int_1^b e^{-x}\mathrm{d}x = \Phi(1) + \left[-e^{-x}\right]_1^b$$

$$\Phi(b) \leqslant \Phi(1) + \frac{1}{e} - e^{-b} \leqslant \Phi(1) + \frac{1}{e}$$

Ainsi Φ est bornée. /1
Et par conséquent, $\displaystyle\int_0^b e^{-x^2}\mathrm{d}x$ admet une limite pour $b \to +\infty$ (fonction croissante majorée).

$$\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[}$$

2. On considère $n \in \mathbb{N}$.

   (a) f_n est continue sur $[0, \sqrt{n}[$ comme fonction polynôme et sur $]\sqrt{n}, +\infty[$
   et par ailleurs : $\lim_{\sqrt{n}^-} f_n(t) = 0 = \lim_{\sqrt{n}^+} f_n(t)$.

   /1,5

   $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc } f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+ \\ \text{En outre, } f_n \text{ est donc intégrable sur } [0, \sqrt{n}], \text{ puis nulle, donc intégrable sur } \mathbb{R}+\end{array}}$$

   (b) Notons d'abord que

   $$\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)\mathrm{d}x$$

   Ensuite, considérons $h : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, \sqrt{n}]$, $t \mapsto \sqrt{n}\sin t$.
   h est bijective sur ces intervalles, de classe $\mathcal{C}^1$ et $h'(t) = \sqrt{n}\cos t$.
   On peut donc faire le changement de variable donné par $x = h(t)$

   $$\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^n \sqrt{n}\cos t\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\mathrm{d}t$$

   Donc

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sqrt{n}I_{2n+1}}$$

   /2

   (c) On applique tout simplement le résultat final de la partie A

   /1

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$,
   on sait bien (et sinon, il est grand temps de le savoir) que $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \to e^y$.
   Donc avec $y = -x^2$: $f_n(x) \to e^{-x^2}$.

   /2

   $$\boxed{\text{Ainsi pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \varphi(x).}$$

4. Croissance de $\big(f_n(x)\big)_n$.

   (a) Soient $a, b \geqslant 0$, donc $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ existe, on a alors

   $$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0 \Longrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0 \Longrightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

   $$\boxed{\forall\ a, b \geqslant 0, \qquad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}}$$

   /1

   Puis considérons pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_m$: « $\forall\ (a_1, a_2, \dots a_{2^m}) \in (\mathbb{R}_+)^{2^m}$, $\dfrac{\sum_{i=1}^{2^m} a_i}{2^m} \geqslant \sqrt[2^m]{\prod_{i=1}^{2^m} a_i}$ »

   — Pour $m = 1$, on retrouve la formule précédente.
   — Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_m$ est vraie.
   Soient $a_1, a_2, \dots a_{2^{m+1}}$, une famille de $2^{m+1} = 2 \times 2^m$ nombres positifs.
   On note alors $b_1 = a_1, \dots b_{2^m} = a_{2^m}$ et $c_1 = a_{2^m+1}, \dots c_{2^m} = a_{2^{m+1}}$,
   deux familles de 2^m nombres positifs.

   $$\frac{\sum_{i=1}^{2^{m+1}} a_i}{2^{m+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{2^m} b_i + \sum_{i=1}^{2^m} c_i}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{2^m} b_i}{2^m} + \frac{\sum_{i=1}^{2^m} c_i}{2^m}\right)$$

   On applique l'inégalité précédentes pour deux termes puis $\mathcal{P}_m$ à chacune de ces familles

   $$\frac{\sum_{i=1}^{2^{m+1}} a_i}{2^{m+1}} \geqslant \sqrt[2]{\frac{\sum_{i=1}^{2^m} b_i}{2^m} \times \frac{\sum_{i=1}^{2^m} c_i}{2^m}} = \sqrt[2]{\frac{\sum_{i=1}^{2^m} b_i}{2^m}}\sqrt[2]{\frac{\sum_{i=1}^{2^m} c_i}{2^m}} \geqslant \sqrt{\sqrt[2^m]{\prod_{i=1}^{2^m} b_i} \times \sqrt[2^m]{\prod_{i=1}^{2^m} c_i}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{2^{m+1}} a_i}{2^{m+1}} \geqslant \sqrt{\sqrt[2^m]{\prod_{i=1}^{2^m} b_i \times \prod_{i=1}^{2^m} c_i}} = \sqrt[2\times 2^m]{\prod_{i=1}^{2^{m+1}} a_i}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{m+1}$ est vraie.

On a donc démontré l'inégalité arithmético-géométrique pour un nombre de termes égal à une puissance de 2.

/2,5

$$\boxed{\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \forall\, (a_1, a_2, \dots a_{2^m}) \in (\mathbb{R}_+)^{2^m} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{2^m} a_i}{2^m} \geqslant \sqrt[2^m]{\prod_{i=1}^{2^m} a_i} \qquad \text{(IAG)}}$$

(b) Soient $x \in \mathbb{R}_+$, et $n \geqslant x^2$, donc $n+1 \geqslant x^2$, également.

On considère $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$ ($m = \lceil \frac{\ln n}{\ln 2} \rceil$)

On peut appliquer (IAG) car il s'agit d'une famille à termes positifs. On cherche les deux moyennes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m} a_i &= \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^m}\Big(n \times (1 - \tfrac{x^2}{n}) + 1 + (2^m - n - 1) \times (1 - \tfrac{x^2}{n+1})\Big) \\ &= \frac{1}{2^m}\Big((n+1) - x^2 + 2^m - (n+1) - \tfrac{2^m x^2}{n+1} + x^2\Big) = 1 - \frac{x^2}{n+1}\end{aligned}$$

$$\prod_{i=1}^{2^m} a_i = (1 - \frac{x^2}{n})^n \times 1 \times (1 - \frac{x^2}{n+1})^{2^m - n - 1} = (1 - \frac{x^2}{n})^n (1 - \frac{x^2}{n+1})^{2^m - n - 1}$$

Ainsi, en élevant à la puissance 2^m l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\left(\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m} a_i\right)^{2m} \geqslant \prod_{i=1}^{2^m} a_i$$

C'est-à-dire, ici :

$$\left(1 - \frac{x^2}{n+1}\right)^{2m} \geqslant (1 - \frac{x^2}{n})^n (1 - \frac{x^2}{n+1})^{2^m - n - 1} \Longrightarrow \left(1 - \frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant (1 - \frac{x^2}{n})^n$$

après avoir divisé par $(1 - \dfrac{x^2}{n+1})^{2^m - n - 1} > 0$

/2,5

$$\boxed{\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \left(1 - \frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1}}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Si $x \geqslant \sqrt{n}$, alors $f_n(x) = 0$ et $f_{n+1}(x) \geqslant 0$, donc $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$

— Si $x \leqslant \sqrt{n}$, alors $x \leqslant \sqrt{n+1}$ et donc $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \left(1 - \frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1} = f_{n+1}(x)$.

Dans tous les cas : $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

/1,5

$$\boxed{\text{La suite } (f_n(x)_n \text{ est croissante } (x \text{ est fixé}).}$$

5. On vérifie les hypothèses de la partie B :

— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la suite $\big(f_n(x)\big)_n$ est croissante et convergente vers $\varphi(x)$.

— La suite $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sqrt{n} I_{2n+1}$ est donc croissante. Elle est convergente donc bornée.

On peut appliquer le théorème de convergence monotone (Beppo Levi), on a donc

/1,5

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x}$$

6. Et plus précisément

$$\boxed{G = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$ /1