

Devoir à la maison n°14 CORRECTION

Problème

Partie I. Un produit scalaire sur E

1. Soit $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, donc

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

2. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|u(x)| \times |v(x)| \leq \frac{1}{2}(|u(x)|^2 + |v(x)|^2)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|u(x)v(x)e^{-x^2}| \leq \frac{1}{2}(|u(x)|^2 e^{-x^2} + |v(x)|^2 e^{-x^2})$.

Par ailleurs, u et v appartiennent à E , donc $\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} (v(x))^2 e^{-x^2} dx$ convergent.

Par majoration de fonctions positives :

$$0 \leq \int_0^X |u(x)v(x)e^{-x^2}| dx \leq \int_0^X \frac{1}{2}(|u(x)|^2 e^{-x^2} + |v(x)|^2 e^{-x^2}) dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(|u(x)|^2 e^{-x^2} + |v(x)|^2 e^{-x^2}) dx$$

Donc $X \mapsto \int_0^X |u(x)v(x)e^{-x^2}| dx$ est croissante (intégrand positif), majorée donc convergente.

Puis en notant $\varphi^+ = \max(\varphi, 0)$ et $\varphi^- = -\min(\varphi, 0)$, on a : $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$, $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$.

Et donc $0 \leq \varphi^+ \leq |\varphi|$ et $0 \leq \varphi^- \leq |\varphi|$.

Donc $X \mapsto \int_0^X (u(x)v(x)e^{-x^2})^+ dx$ est croissante, majorée donc convergente.

Donc $X \mapsto \int_0^X (u(x)v(x)e^{-x^2})^- dx$ est croissante, majorée donc convergente.

Et enfin par addition : $X \mapsto \int_0^X u(x)v(x)e^{-x^2} dx$ est convergente.

De même : $X \mapsto \int_{-X}^0 u(x)v(x)e^{-x^2} dx$ est convergente.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx \text{ converge}$$

3. (a) L'ensemble des applications continues sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Nous allons montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors $(\lambda u + \mu v)^2(x) = \lambda^2 u^2(x) + 2\lambda\mu u(x)v(x) + \mu^2 v^2(x)$.

Or $u, v \in E$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} (v(x))^2 e^{-x^2} dx$ convergent

et par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda u(x))^2 e^{-x^2} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu v(x))^2 e^{-x^2} dx$ convergent,

et d'après la question 2, $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} 2\lambda\mu u(x)v(x)e^{-x^2} dx$ convergent.

Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda u(x) + \mu v(x))^2 e^{-x^2} dx$ converge et donc $\lambda u + \mu v \in E$.

E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

(b) — $(u|v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)u(x)e^{-x^2} dx = (v|u)$. Le produit est symétrique.

— $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 | v = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x))v(x)e^{-x^2} dx$

$$= \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x)v(x)e^{-x^2} dx + \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(x)v(x)e^{-x^2} dx = \lambda_1 (u_1|v) + \lambda_2 (u_2|v)$$

par linéarité de l'intégrale.

Donc le produit est linéaire à gauche, puis par symétrie il est linéaire à droite.

Ainsi le produit est bilinéaire.

- Soit $u \in E$, $(u|u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)e^{-x^2} dx \leq 0$, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u^2(x)e^{-x^2} \leq 0$.
Donc le produit est positif.
 - Soit $u \in E$ tel $(u|u) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)e^{-x^2} dx = 0$.
Or il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive et CONTINUE
donc nécessairement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u^2(x)e^{-x^2} = 0$ i.e $u(x) = 0$ donc $u = 0$.
Donc le produit est défini.
- Par conséquent

$$(\cdot|\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.$$

4. Il existe donc A tel que pour tout $t \geq A$, $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$. Donc

$$\int_A^X |f(t)| dt \leq \int_A^X \frac{1}{t^2} dt = \left[\frac{-1}{t} \right]_A^X \rightarrow \frac{1}{A}$$

Donc $\int_A^X |f(t)| dt$, puis $\int_A^X (f(t))^+ dt$ et $\int_A^X (f(t))^- dt$ et enfin $\int_A^X f(t) dt$ convergent.

Donc en additionnant $\int_0^A f(t) dt$ (car f est continue) :

$$x \mapsto \int_0^x f(t) dt \text{ admet une limite.}$$

Soit $u \in F$, on doit montrer que $u \in E$ i.e. que u est continue et que $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)e^{-x^2} dx$ converge.

Or u est une fonction polynomiale donc nécessairement continue.

En outre, si l'on note d , le degré de u , alors u^2 est de degré $2d$.

Donc $u^2(x)e^{-x^2} = |u^2(x)e^{-x^2}| \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_d^2 x^{2d} e^{-x^2}$, puis $x^2 \times |u^2(x)e^{-x^2}| \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_d^2 x^{2d+2} e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)e^{-x^2} dx$ converge et donc $u \in E$.

$$F \subset E$$

Partie II. Polynômes d'Hermite

1. w est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w'(x) = -2xe^{-x^2}$, $w'' = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$ et $w^{(3)}(x) = (8x + 4x - 8x^3)e^{-x^2}$.

Donc

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, comme $w^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$ on a

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} w^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} (w^{(n)})'(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} ((-1)^n e^{-x^2} H_n)'(x)$$

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} (-1)^n (-2xe^{-x^2} H_n(x) + H'_n e^{-x^2}) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

- (b) Notons d_n le degré du polynôme n .

Alors le degré de H'_n est $d_n - 1$, celui de $x \mapsto 2xH_n(x)$ est $d_n + 1$.

Donc nécessairement, d_{n+1} le degré de H_{n+1} est égale à $d_n + 1$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = d_n + 1$, donc la suite (d_n) est arithmétique de raison 1.

Par conséquent $d_n = n + d_0$.

Et comme $H_0 = 1$, alors $d_0 = 0$ et donc

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, H_n \text{ est un polynôme de degré } n.$$

- (c) $H_0(x) = 1$ donc $H_1(x) = 2xH_0(x) - H'_0(x) = 2x$.

$H_1(x) = 2x$ donc $H_2(x) = 2xH_1(x) - H'_1(x) = 4x^2 - 2$.

$H_2(x) = 4x^2 - 2$ donc $H_3(x) = 2xH_2(x) - H'_2(x) = 8x^3 - 12x$.

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$ donc $H_4(x) = 2xH_3(x) - H'_3(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$.

3. Notons a_n , le coefficient dominant de H_n .

Celui de $2xH_n(x) - H'_n(x)$ est alors $2a_n$ (pour des raisons de degré).

Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n$, c'est une suite géométrique de raison 2.

Donc comme $a_0 = 1$,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ le coefficient du terme de plus haut degré de } H_n \text{ est } 2^n.$$

4. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: "pour tout $x \in \mathbb{R}$: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ ".

— $H_0(x) = 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_0(-x) = H_0(x)$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$, que l'on peut dériver :

par composition : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \times H'(-x) = (-1)^n H'_n(x)$ (/0,5) donc $H'_n(-x) = (-1)^{n+1} H'_n(x)$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(-x) = 2(-x)H_n(-x) - H'_n(-x) = -(-1)^n 2xH_n(x) - (-1)^{n+1} H'_n(x)$
 $= (-1)^{n+1} [2xH_n(x) - H'_n(x)] = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x)$ Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Bilan :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in \mathbb{R} : H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Par conséquent,

$$H_n \text{ a la même parité que } n.$$

Partie III. Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

1. (a) Soit $P \in F$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(P'|H_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t) H_{n-1}(t) e^{-t^2} dt$$

Nous allons faire une intégration par parties sur un intervalle sur $[-x, x]$.

Soit $u : t \mapsto H_{n-1}(t) e^{-t^2}$ de dérivée $u' : t \mapsto H'_{n-1}(t) e^{-t^2} - 2t H_{n-1}(t) e^{-t^2} = -H_n e^{-t^2}$

d'après la relation de récurrence.

On considère aussi $v : t \mapsto P(t)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{-x}^x P'(t) H_{n-1}(t) e^{-t^2} dt = P(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} - P(-x) H_{n-1}(-x) e^{-x^2} - \int_{-x}^x P(t) H_n(t) e^{-t^2} dt$$

En passant à la limite (comme $P \times H_{n-1}$ est un polynôme : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} = 0$), on a

$$(P'|H_{n-1}) = (P|H_n).$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in F_{n-1}$.

Notons pour tout $k \leq n$: $u_k = (P^{(k)}|H_{n-k})$.

Alors d'après (a), tant que $n - k > 0$ (i.e. $k < n$), on a $u_k = ((P^{(k)})'|H_{n-k-1}) = u_{k+1}$.

Donc la suite u_k est constante pour toute valeur k comprise entre 0 et n .

Ainsi

$$(P|H_n) = u_0 = u_n = (P^{(n)}|H_0) = 0$$

car $P^{(n)} = 0$ car $\deg P \leq n - 1$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $h, k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $h \neq k$.

Supposons que $h < k$ (cela serait identique si $h > k$),

Alors $\deg(H_h) = h < k$ donc $H_h \in F_{k-1}$ et donc d'après (b) : $(H_h|H_k) = 0$.

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (H_0, \dots, H_n) \text{ est orthogonale dans } F.$$

2. La famille $(H_0, \dots, H_n)$ est orthogonale donc elle est libre.

Pour le démontrer il suffit de faire : $0 = (0|0) = (\lambda_0 H_0 + \dots + \lambda_n H_n | \lambda_0 H_0 + \dots + \lambda_n H_n) = \sum_{i=0}^n \lambda_i^2$

Cette famille est composée de $n + 1$ vecteurs, c'est-à-dire en nombre égal à $\dim F_n$.

Donc

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (H_0, \dots, H_n) \text{ est une base de } F_n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) La démonstration faite en 1.(b) reste vraie :

la suite $v_k = (H_n^{(k)}|H_{n-k})$ est constante pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier

$$\|H_n\|^2 = (H_n|H_n) = v_0 = v_n = (H_n^{(n)}|H_0)$$

(b) H_n est de degré n , donc $H_n^{(n)}$ est égal à $n!$ multiplié par le coefficient dominant de H_n .

Or on a vu que celui-ci valait 2^n (II.3.).

Donc $\|H_n\|^2 = (2^n n!|1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n n! e^{-x^2} = 2^n n!$ d'après la remarque préliminaire.

Finalement

$$\|H_n\| = \sqrt{2^n n!}$$

Partie IV. Un endomorphisme symétrique

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $P_1, P_2 \in F$.

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = -(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'' + 2X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' + (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)$$

$$= -\lambda_1 P_1'' - \lambda_2 P_2'' + 2X\lambda_1 P_1' + 2X\lambda_2 P_2' + (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$$

par linéarité de la dérivation.

Donc $f : F \rightarrow F$ est un linéaire et

$$f \text{ est donc un endomorphisme de } F.$$

On admet que g et h sont aussi des endomorphismes de F , et on note Id_F l'application identique de F .

2. (a) Soit $P \in F$,

$$(g \circ h)(P) = g(h(P)) = g(P') = 2XP' - P'' = f(P) - P = (f - \text{Id}_F)(P)$$

$$(h \circ g)(P) = h(g(P)) = (g(P))' = 2P + 2XP' - P'' = f(P) + P = (f + \text{Id}_F)(P)$$

Finalement :

$$g \circ h = f - \text{Id}_F \text{ et } h \circ g = f + \text{Id}_F$$

(b) On a donc $g \circ h \circ g = (f - \text{Id}_F) \circ g$ mais aussi $g \circ h \circ g = g \circ (f + \text{Id}_F)$

Donc $f \circ g - g = g \circ f + g$ et finalement :

$$f \circ g - g \circ f = 2g$$

3. Supposons donc que P est non nul et vérifie $f(P) = \lambda P$.

Alors $f(g(P)) - g(f(P)) = 2g(P)$, donc $f(g(P)) = 2g(P) + g(\lambda P) = (2 + \lambda)(g(P))$, par linéarité. Donc

$$\text{si } g(P) \text{ est non nul, alors } g(P) \text{ est aussi un vecteur propre de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda + 2$$

4. (a) $H_0 = 1$ donc $f(H_0) = 1 = H_0$ puisque H_0 est un polynôme de degré 1.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, $g(H_k) = 2XH_k - H'_k = H_{k+1}$ d'après la relation de récurrence sur les polynômes d'Hermite.

Posons ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_k : "f(H_k) = (2k + 1)H_k"$.

— $f(H_0) = (2 \times 0 + 1)H_0 = H_0$ d'après la question précédente.

Donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

— Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Alors $f(H_k) = (2k + 1)H_k$ et donc d'après la question 3 : $f(g(H_k)) = ((2k + 1) + 2)g(H_k)$.

Or $g(H_k) = H_{k+1}$ et $2k + 1 + 2 = 2(k + 1) + 1$.

Donc $\mathcal{Q}_{k+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N} : f(H_k) = (2k + 1)H_k.$$

5. Soit $P, Q \in F$,

On considère $u(t) = P'e^{-t^2}$ et $v(t) = Q(t)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors on a $u'(t) = P''(t)e^{-t^2} - 2tP'(t)e^{-t^2} = [P(t) - f(P(t))]e^{-t^2}$ et $v'(t) = Q'(t)$.

Le crochet converge : $u(t) \times v(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$ (polynôme $\times$ exponentielle)

On peut donc effectuer une intégration par parties :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q'(t)P'(t)e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt = 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)v(t)dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)(P(t) - f(P(t)))e^{-t^2} dt$$

$$\text{pour tout } (P, Q) \in F^2 : (P'|Q') = (f(P)|Q) - (P|Q).$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) $f(P)$ est bien un polynôme.

En outre $\deg(P') = \deg(P) - 1$ et $\deg(P'') = \deg(P) - 2$, $\deg(2XP') = \deg(P)$.

Finalement, $\deg(f(P)) = \deg(P)$, donc $P \in F_n$.

Par conséquent,

$$\forall P \in F_n, f(P) \in F_n.$$

On note f_n l'endomorphisme de F_n défini par : $\forall P \in F_n, f_n(P) = f(P)$.

(b) Il s'agit de montrer que pour tout $P, Q \in F_n$, $(f(P)|Q) = (P|f(Q))$.

Soit $P, Q \in F_n$, alors $f_n(P) = f(P)$ et $f_n(Q) = f(Q)$.

On sait $(P'|Q') = (f_n(P)|Q) - (P|Q)$

et par symétrie du produit scalaire $(P'|Q') = (Q'|P') = (f_n(Q)|P) - (Q|P)$.

Donc $(f_n(P)|Q) - (P|Q) = (P'|Q') = (f_n(Q)|P) - (Q|P)$.

Et comme $(P|Q) = (Q|P)$ on a donc $(f_n(P)|Q) = (f_n(Q)|P) = (P|f(Q))$

et donc

$$f_n \text{ est un endomorphisme symétrique de } F_n.$$

(c) f_n est diagonalisable dans une base orthonormée de F_n .

Par ailleurs, nous savons que pour tout $k \in [0, n]$, $f_n(H_k) = f(H_k) = (2k + 1)H_k$ 4.(b).

Notons, pour tout $k \leq n$, $\overline{H}_k = \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} H_k = \frac{1}{\|H_k\|} H_k$.

Par linéarité de $f : f(\overline{H}_k) = (2k + 1)\overline{H}_k$.

Donc la famille $(\overline{H}_0, \overline{H}_1, \dots, \overline{H}_n)$ est une famille de vecteurs propres de f_n ,

Et nous savons également que c'est une base orthonormée de F_n (d'après III.)

$$\text{Une base orthonormale de } F_n \text{ constituée de vecteurs propre de } f_n \text{ est donc } (\overline{H}_0, \overline{H}_1, \dots, \overline{H}_n)$$