Devoir à la maison n°14

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Problème

On confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note E l'ensemble des applications de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que les applications

$$x \mapsto \int_0^x \big(u(t)\big)^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t \text{ et } x \mapsto \int_{-x}^0 \big(u(t)\big)^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

admettent chacune une limite pour $x \to +\infty$. *On dit dans ce cas que* $\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(t)\big)^2 e^{-t^2} dt$ *converge.*
On note F, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, F_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.
On admet que $\forall\ m \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-m)^2}\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} e^{-(t-m)^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Partie I. Un produit scalaire sur E

1. Établir pour tout $\alpha, \beta \geqslant 0$: $\alpha\beta \leqslant \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$.
2. (*) En déduire que, pour tout $(u,v) \in E^2$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x$ converge.

On note $(\cdot|\cdot)$ l'application de E^2 sur $\mathbb{R}$ qui, à tout $(u,v) \in E^2$, associe $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

On notera la présence du facteur $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. (a) Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.
4. Montrer que si f vérifie : f est continue sur $\mathbb{R}_+$,$\lim_{t\to+\infty} t^2|f(t)| = 0$, alors $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite.
   En déduire que $F \subset E$.

On note encore $(\cdot|\cdot)$ la restriction à F ou à F_n, pour $n \in \mathbb{N}$, du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ de E.
On admet que cette restriction est encore un produit scalaire sur F et sur F_n.
On note $\|\cdot\|$ la norme sur E associé au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, définie pour tout $u \in E$ par $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$

Partie II. Polynômes d'Hermite

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$$

où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de w.
En particulier : $H_0(x) = 1$.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.
   Faire figurer les calculs sur la copie.
2. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.
   (c) Contrôler alors les résultats obtenus en question 1. et calculer H_4.
   Faire figurer les calculs sur la copie.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n.
4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.
   Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application H_n ?

Partie III. Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

1. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F$, $\quad (P'|H_{n-1}) = (P|H_n)$,
   où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire sur F défini en I.4.
   (b) En déduire, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in F$, $\quad (P|H_n) = (P^{(n)}|H_0)$.
   Conclure alors, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F_{n-1}$: $(P|H_n) = 0$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots H_n)$ est orthogonale dans F.
2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots H_n)$ est une base de F_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer : $\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)}|H_0)$, où $\|\cdot\|$ est définie en $I.4$.
   (b) En déduire la valeur de $\|H_n\|$

Partie IV. Un endomorphisme symétrique

On note f, g, h les applications définies de F dans F, pour tout $P \in F$ par :

$$f(P) = -P'' + 2XP' + P \qquad g(P) = 2XP - P' \qquad h(P) = P'$$

Ainsi, par exemple, pour tout $P \in F$ et tout $x \in \mathbb{R}$, : $\big(g(P)\big)(x) = 2xP(x) - P'(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de F.
   On admet que g et h sont aussi des endomorphismes de F, et on note Id_F l'application identique de F.
2. (a) Établir : $g \circ h = f - \mathrm{Id}_F$ et $h \circ g = f + \mathrm{Id}_F$
   (b) En déduire : $f \circ g - g \circ f = 2g$
3. Montrer que si $P \in F$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, alors $g(P)$ est également un vecteur propre de f (si $g(P) \neq 0$).
   Quelle est la valeur propre associée alors à $g(P)$?
   On rappelle que P est vecteur propre de f pour la valeur propre λ signifie : $P \neq 0$ et $f(P) = \lambda P$
4. (a) Calculer $f(H_0)$.
   (b) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(H_k)$ et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f(H_k) = (2k+1)H_k$.
5. Établir, pour tout $(P, Q) \in F^2$: $(P'|Q') = (f(P)|Q) - (P|Q)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer : $\qquad \forall\ P \in F_n,\ f(P) \in F_n$.
   On note f_n l'endomorphisme de F_n défini par : $\forall\ P \in F_n,\ f_n(P) = f(P)$.
   (b) Montrer que f_n est un endomorphisme symétrique de F_n.
   (c) Donner une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propre de f_n.