**Devoir à la maison n°12**
CORRECTION

# Exercice 1

• $n$ et $m$ sont deux entiers, impairs, premiers entre eux.
• On note $\text{inv}_{n,m} : E_n \times E_m \to E_n \times E_m$ la permutation qui consiste à passer de l'ordre lexico-graphique de gauche à droite à l'ordre lexico-graphique de droite à gauche.
On a vu dans le DS8 que $\epsilon(\text{inv}_{n,m}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}\frac{m(m-1)}{2}}$.
• On rappelle que $m$ est un dit *résidu quadratique modulo* $n$ si il existe $r \in E_n$ tel que $r^2 \equiv m[n]$.
On sait que :

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \epsilon(v_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ est un résidu quadratique modulo } n \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \equiv m^{\frac{n-1}{2}}[n]$$

où $v_m : \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \mapsto \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, $\overline{h} \mapsto \overline{m \times h}$.

1. On considère $\sigma_1 : \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$, $(i,j) \mapsto (mi+j, j)$.
   (a) On note $\sigma_1^j : \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, $i \mapsto mi+j$.
   On remarque :
   $$\sigma_1^j = c_{+j} \circ v_m \qquad \Longrightarrow \qquad \epsilon(\sigma_1^j) = \epsilon(c_{+j})\epsilon(v_m) = (-1)^{j(n-1)} \times \left(\frac{m}{n}\right)$$
   Et comme $n$ est impair, $(-1)^{n-1} = 1$ et donc
   $$\boxed{\epsilon(\sigma_1^j) = \left(\frac{m}{n}\right)}$$
   (b) Les orbites de $\sigma_1$, sont les mêmes que celles de $\sigma_1^j$, associés à $j$ en seconde coordonnée.
   $$(a,b) = (\sigma_1)^k(a',b') \Longleftrightarrow b = b',\ a = (\sigma_1^b)^k(a')$$
   $$\epsilon(\sigma_1) = (-1)^{\sum_{i=1}^r \ell_i(\sigma_1)-1} = (-1)^{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{r_j} \ell_i(\sigma_1^j)-1\right)} = \left(\prod_{j=1}^m (-1)^{\sum_{i=1}^{r_j} \ell_i(\sigma_1^j)-1}\right) = \left(\prod_{j=1}^m \left(\frac{m}{n}\right)\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^m$$
   *où $\ell_i(\varphi)$ est la longueur de l'orbite indexé par $i$ pour la permutation $\varphi$* Or $m$ est impair et $\left(\frac{m}{n}\right) \in \{-1, 1\}$, donc
   $$\boxed{\epsilon(\sigma_1) = \left(\frac{m}{n}\right)}$$
2. On a comme précédemment, en considérant $\sigma_2^i(i,j) \mapsto (i+nj) = c_{+i} \circ v_n$ (modulo $m$),
   on trouve d'abord $\epsilon(\sigma_2^i) = \left(\frac{n}{m}\right)$ (car $m$ est impair).
   Puis, on retrouve de même ($n$ est impair) :
   $$\boxed{\epsilon(\sigma_2) = \left(\frac{n}{m}\right)^n = \left(\frac{n}{m}\right)}$$
3. On note $\pi : \dfrac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$, $r \mapsto (r_n, r_m)$ tel que $r \equiv r_n[n]$ et $r \equiv r_m[m]$ (restes dans les divisions euclidiennes par $n$ et $m$ respectivement).
   On considère également $\lambda : \dfrac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}}$, $(mi+j) \mapsto (i+nj)$.
   (a) $\pi$ est une application parfaitement défini de $\dfrac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}}$, qui possède $nm$ éléments, vers $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$, qui possède également $n \times m$ éléments.
   Il suffit de montrer que $\pi$ est injective (ou surjective) pour pouvoir affirmer qu'elle est bijective.
   Or si $\pi(r) = \pi(r')$, alors $n | r-r'$ et $m | r-r'$.
   et donc comme $n \wedge m = 1$, $nm | r-r'$ (corollaire de Gauss).
   Or $r - r' \in [\![1-nm, nm-1]\!]$ ; une seule possibilité : $r - r' = 0$, i.e. $r = r'$ et $\pi$ est injective.
   $$\boxed{\pi \text{ est bijective}}$$

(b) Comme $n \wedge m = 1$, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $an + bm = 1$.
D'après la relation précédente : $an \equiv 1[m]$ et $bm \equiv 1[n]$.
On note $r = anj + bmi$, alors on a donc $\pi(r) = (i, j)$ car $r \equiv 0 + 1 \times i[n]$ et $r \equiv 1 \times j + 0[m]$
Donc, par bijectivité de $\pi$

$$\boxed{\pi^{-1} : (i, j) \mapsto anj + bmi([nm])}$$

(c) Soit $(i, j) \in \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$.

$$\pi^{-1} \circ \sigma_1(i, j) = \pi^{-1}(mi + j, j) \equiv anj + bm(mi + j) \equiv (an + bm)j + m(bmi)[nm]$$

Or $an + bm = 1$, donc

$$\pi^{-1} \circ \sigma_1(i, j) \equiv j + m(i - ani) \equiv j + mi - anmi \equiv mi + j[nm]$$

Et de même :

$$\pi^{-1} \circ \sigma_2(i, j) = \pi^{-1}(i, i + nj) \equiv ani + an^2 j + bmi \equiv (an + bm)i + n(anj)[nm]$$

$$\pi^{-1} \circ \sigma_2(i, j) \equiv i + n(j - bmj) \equiv i + nj - bnmj \equiv i + nj[nm]$$

On a donc $\lambda[\pi^{-1} \circ \sigma_1(i, j)] = \pi^{-1} \circ \sigma_2(i, j)$

$$\boxed{\lambda \circ \pi^{-1} \circ \sigma_1 = \pi^{-1} \circ \sigma_2}$$

(d) L'ordre lexico-graphique de gauche à droite correspond exactement à l'affectation au couple $(i, j) \in \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ la valeur $im + j$ de $\dfrac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}}$.
L'ordre lexico-graphique de droite à gauche correspond exactement à l'affectation au couple $(i, j) \in \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ la valeur $i + nj$ de $\dfrac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}}$.
Donc $\mathrm{inv}_{m,n}$ et $\lambda$ effectuent la même permutation (sur des ensembles isomorphes mais distincts : $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ et $\dfrac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}}$ respectivement.

$$\boxed{\epsilon(\lambda) = \epsilon(\mathrm{inv}_{m,n})}$$

4. Le bilan des questions précédentes donnent (et en exploitant le résultat du DS 8) :

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2} \frac{m(m-1)}{2}} = \epsilon(\mathrm{inv}_{m,n}) = \epsilon(\lambda) = \epsilon(\pi^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1} \circ \pi)$$

$$= \epsilon(\pi^{-1})\epsilon(\sigma_2)\epsilon(\sigma_1^{-1})\epsilon(\pi) = \epsilon(\sigma_2)\epsilon(\sigma_1)^{-1}$$

Enfin, comme $(-1)^{-1} = (-1)$ et $1^{-1} = 1$, on peut affirmer la loi de réciprocité quadratique :

$$\boxed{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} \frac{m(m-1)}{2}}}$$

# Exercice 2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\chi(t) = \det(tI_n - M)$$

appelé la fonction caractéristique de $M$. Dans tout le problème, on suppose que $M = (a_{i,j})$.

1. $\mu_1 = (-1)^1 \displaystyle\sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-1}} \det M^{I \wedge I}$.

Dans ce cas $I$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}_n$ de cardinal $(n-1)$,
il s'agit donc des $n$ ensembles $I_k = \mathbb{N}_n \backslash \{k\}$, donc $M^{I_k \wedge I_k} = a_{k,k}$.
Par conséquent : $\mu_1 = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,k} = -\mathrm{tr}(M)$

Et $\mu_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-n}} \det M^{I \wedge I} = (-1)^n \det M^{\emptyset \wedge \emptyset} = (-1)^n \det M$

$$\boxed{\mu_1 = -\mathrm{tr}(M) \text{ et } \mu_n = (-1)^n \det M.}$$

2. Comme $I_n = (\delta_{i,j})$, on peut écrire (formule du déterminant) : $\chi_M(t) = \sum_{\sigma\in S_n}\left(\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(\delta_{\sigma(i),i}t - a_{\sigma(i),i})\right)$.
Il s'agit donc d'une somme de produits de $n$ monômes (de degré 1 ou 0) en $t$. C'est donc bien un polynôme.
Par ailleurs ce polynôme est au plus de degré $n$.
En effet, chacun des monômes est de degré 1, au plus
et on a exactement un produit de $n$ monômes de degré 1 pour $\sigma = \mathrm{id}$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$, cherchons maintenant quelle est la valeur du coefficients devant $t^k$ (noté $[\chi_M]_k$).
Dans le développement précédent, pour que $t^k$, il s'agit de prendre :
— $k$ fois $t$ dans le développement donc cela apparait pour toute permutation $\sigma$ qui laisse fixe au moins $k$ valeurs de $[\![1, n]\!]$.
Par exemple on peut considérer $\sigma(i_1) = i_1 \dots \sigma(i_k) = i_k$.

— A chaque ensemble $\{i_1, \dots i_k\}$ fixé par $\sigma$, on trouve alors associé à $t^k = t\delta i_1, i_1 \times \dots t\delta_{i_k,i_k}$, le nombre
$$\epsilon(\sigma)\prod_{j\notin\{i_1,i_2,\dots i_k\}}(-a_{\sigma(j),j}) = (-1)^{n-k}\epsilon(\sigma)\prod_{j\notin\{i_1,i_2,\dots i_k\}}a_{\sigma(j),j}$$
Notons alors $I = \{i_1, i_2, \dots i_k\}$ et considérons alors $\sigma'$ la permutation de $\mathbb{N}_n \backslash I$
telle que $\forall\ j \notin I$, $\sigma'(j) = \sigma(j)$,
alors les transpositions qui décomposent $\sigma$ décomposent aussi $\sigma'$ et donc $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma')$
On a donc associé à $t^k = t\delta i_1, i_1 \times \dots t\delta_{i_k,i_k}$, le nombre
$$(-1)^{n-k}\epsilon(\sigma')\prod_{j\notin I}a_{\sigma'(j),j} = (-1)^{n-k}\det(A^{I\wedge I})$$
Insistons : il y a autant de $I$ que de $\{i_1, \dots i_k\}$.
Globalement, on a donc comme coefficient devant $t^k$ :
$$\sum_{I\subset\binom{N_n}{k}}(-1)^{n-k}\det(A^{I\wedge I}) = \mu_k$$
On peut conclure que
$$\boxed{\chi_M(t) = t^n + \mu_1 t^{n-1} + \mu_2 t^{n-2} + \dots + \mu_{n-1}t + \mu_n}$$
On notera que $\mu_0 = 1$ (déterminant de la matrice vide...)

3. Par définition : $L(t) = {}^t\mathrm{com}(tI_n - M)$.
Pour construire la comatrice, on fait un calcul de déterminant pour chacun des coefficients de cette matrice.
Donc pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\mathrm{Coef}_{i,j}(L(t))$ est un polynôme en $t$.
Il est obtenu en supprimant une ligne et une colonne de $tI_n - M$,
donc toujours au moins un $t$ dans le calcul du déterminant.
Ainsi le polynôme obtenu est de degré $\deg(\chi_M) - 1 = n - 1$.
Au lieu d'écrire la matrice en coefficient polynomiale $A = (P_{i,j}(t))_{i,j}$,
on écrit la matrice $A$ sous la forme $A = \sum_{k=0}^{n-1}A_k t^k$, avec $A_k = ([P_{i,j}]_k)_{i,j}$,
c'est-à-dire $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme matrice des coordonnées de $t^k$ dans $P_{i,j}$,
Et on peut affirmer :
$$\boxed{L(t) = {}^t\mathrm{com}(tI_n - M) \text{ est une fonction polynomiale en } t\text{, de degré } n-1 \text{ et à coefficients dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

4. Soit $t \in \mathbb{K}$.
Un résultat du cours énonce que pour tout $A$, ${}^t\mathrm{com}(A) \times A = \det(A)I_n$, donc pour $A = tI_n - M$ :
$$\boxed{\forall\ t \in \mathbb{K}, \quad L(t) \times (tI_n - M) = \det(tI_n - M)I_n = \chi_M(t) \times I_n}$$

5. On cherche à démontrer la relation de Cayley-Hamilton : $\chi_M(M) = 0$

**Remarques !**
*Il ne suffit pas de dire on prend $M$ à la place de $t$ et « pouf » $\det(tI_n - M) = \det(M - M) = 0\dots$*
*En effet, ici nous avons une relation numérique et non matricielle.*
*Il faut donc faire le calcul coefficient par coefficient...*

Et par ailleurs, en conservant la notation $L(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k t^k$ avec $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$L(t)(tI_n - M) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^k (tI_n - M) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^{k+1} - A_k M t^k = A_{n-1}t^n + \sum_{h=1}^{n-1}(A_{h-1} - A_h M)t^h - A_0 M$$

$$= \chi_M(t) I_n = t^n I_n + \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{n-h} I_n t^h$$

L'égalité de deux polynômes permet d'affirmer une égalité des coefficients.
Donc (si besoin, en prenant $A_{-1} = O_n$) :

$$A_{n-1} = I_n \qquad \text{et } \forall\, h \in [\![0, n-1]\!], (A_{h-1} - A_h M) = \mu_{n-h} I_n$$

Reste alors à calculer $\chi_M$. En notant $M^0 = I_n$, on a :

$$\chi_M(M) = M^n + \sum_{k=1}^{n} \mu_k M^{n-k} = M^n + \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{n-h} M^h = M^n + \sum_{h=0}^{n-1}(A_{h-1} - A_h M)M^h$$

$$= M^n + \sum_{h=0}^{n-1} A_{h-1} M^h - \sum_{h=0}^{n-1} A_h M^{h+1} = M^n + A_{-1} I_n - A_{n-1} M^n$$

par télescopage.
Or $A_{-1} = 0$ et $A_{n-1} = I_n$.

$$\boxed{\text{On trouve donc la relation de Cayley-Hamilton : } \chi_M(M) = 0}$$

**Remarques !**

- *Cela assure que pour toute matrice $A$ de taille $n$, il existe (au moins) un polynôme de degré $n$ qui annule $A$.*
- *Cela n'était pas évident a priori car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est un espace de dimension $n^2$.*

# Exercice 3

A toute partie $E$ de $\mathbb{R}$, on associe la fonction caractéristique : $\mathbf{1}_E : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$.

On note $|E| = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, la « mesure »de $E$.

Enfin, on dit que $E$ est de mesure nulle, si $|E| = 0$.

1. Pour tout $x \in F$, $x \in E$, donc $\mathbf{1}_F(x) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{1}_E(x) = 1$.
   Par conséquent : $0 \leqslant \mathbf{1}_F \leqslant \mathbf{1}_E$.
   Puis par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant |F| \leqslant |E|$.
   Or $E$ est de mesure nulle, donc nécessairement
   $$\boxed{F \text{ est de mesure nulle.}}$$
2. Il s'agit simplement d'une fonction en escalier.
   On a vu que l'intégrale d'une telle fonction est égale à sa somme de Riemann.
   $$\boxed{|[a,b]| = (b-a) \times 1 + 0 = b - a}$$
3. On suppose que $E = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable, donc.
   Soit $\epsilon > 0$. On considère $\delta : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \notin E \\ \frac{\epsilon}{2^{k+1}} & \text{si } t = x_k \end{cases}$, une jauge (positif).
   Soit $\mathcal{P} = \big(([a_0, a_1], t_1), \dots ([a_{n-1}, a_n], t_n)\big)$ une subdivision adaptée.
   Alors
   $$0 \leqslant S(\mathbf{1}_E, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\mathbf{1}_E(t_i) = 0 + \sum_{i \leqslant n, t_i \in E}(a_i - a_{i-1}) \leqslant \sum_{t_i \in E} \delta(t_i) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} = \epsilon$$
   $$\boxed{\text{Par conséquent, } E \text{ est mesurable et } |E| = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E = 0}$$

L'exemple de l'ensemble triadique de Cantor montre que la réciproque est fausse.

4. A tout $x \in [0,1]$, on associe les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_n = \lfloor 3^n x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^{n-1} x \rfloor$$

(a) On sait que $\varphi([a,b]) \subset [a,b]$, donc si $K_n = \bigcup_{j=1}^{r} [a_j, b_j]$ union disjointe, alors

$$K_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{r} \varphi([a_j, b_j]) \subset \bigcup_{j=1}^{r} [a_j, b_j] = K_n$$

$$\boxed{K_{n+1} \subset K_n}$$

(b) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|[a,b]| = b - a$ et $|\varphi([a,b])| = \left|\left[a, \frac{2a+b}{3}\right] \cup \left[\frac{a+2b}{3}, b\right]\right|$.
Et comme la réunion est disjointe (en fait il s'agit d'une fonction en escalier sur deux étages) :

$$|\varphi([a,b]) = \left|\left[a, \frac{2a+b}{3}\right]\right| + \left|\left[\frac{a+2b}{3}, b\right]\right| = \frac{2a+b-3a}{3} + \frac{3b-2b-a}{3} = \frac{2}{3}(b-a)$$

Ainsi à chaque étape, $|K_{n+1}| = \frac{2}{3}|K_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |K_0| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$\boxed{|K_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

(c) Comme la suite $(K_n)$ est décroissante, $K \subset K_n$, pour tout entier $n$.
Et donc $|K| \leqslant |K_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Puis par convergence par encadrement :

$$\boxed{|K| \leqslant \lim |K_n| = 0 \text{ donc } K \text{ est de mesure nulle.}}$$

(d) Pour tout nombre réel $u$, $0 \leqslant u - \lfloor u \rfloor < 1$.
Donc avec $u = 3^n x$, puis en multipliant par 3 :

$$0 \leqslant 3^{n+1} x - 3\lfloor 3^n x \rfloor < 3$$

Et donc $\lfloor 3^{n+1} x - 3\lfloor 3^n \rfloor \rfloor \in \{0,1,2\}$.
Enfin, comme $3\lfloor 3^n x \rfloor$ est un nombre entier : $\lfloor 3^{n+1} x - 3\lfloor 3^n \rfloor \rfloor = \lfloor 3^{n+1} \rfloor x - 3\lfloor 3^n \rfloor$

$$\boxed{\text{Donc la suite } (a_n) \text{ est à valeurs dans } \{0,1,2\}.}$$

(e) La série de terme général $\frac{a_k}{3^k}$ est à terme positifs et $\frac{a_k}{3^k} \leqslant \frac{2}{3^k}$.
La série géométrique de terme général $\frac{2}{3^k}$ est convergente.
Donc par comparaison (majoration) de séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{a_k}{3^k} \text{ est convergente.}}$$

On note $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}$.
On sait que $a_n = \lfloor 3^n x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^{n-1} x \rfloor$, donc $\frac{a_n}{3^n} = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} - \frac{\lfloor 3^{n-1} x \rfloor}{3^{n-1}}$.
On a donc un téléscopage :

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{\lfloor 3^k x \rfloor}{3^k} - \frac{\lfloor 3^{k-1} x \rfloor}{3^{k-1}} \right) = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} - \lfloor x \rfloor = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n}$$

car $x \in [0,1[$, donc $\lfloor x \rfloor = 0$. Puis comme

$$x - \frac{1}{3^n} = \frac{3^n x - 1}{3^n} \leqslant \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} \leqslant \frac{3^n x}{3^n} = x$$

On a donc $0 \leqslant x - x_n \leqslant \frac{1}{3^n}$. Puis, par encadrement :

$$\boxed{(x_n) \to x}$$

(f) Pour démontrer ce résultat, nous allons préciser la description de $K$.
Si $K_n$ est réunion de $M_n$ intervalles, alors $K_{n+1}$ est réunion de $M_{n+1} = 2 \times M_n$ intervalles
On notera donc $M_h^n$, le $h^{\text{e}}$intervalle qui compose $K_n$

$$K_n = \bigcup_{h=0}^{2n-1} M_h^n$$

On a alors $K_0 = M_0^0 = [0,1]$. Puis $K_1 = \underbrace{\left[0, \frac{1}{3}\right]}_{M_0^1} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, 1\right]}_{M_1^1}$, $K_2 = \underbrace{\left[0, \frac{1}{9}\right]}_{M_0^2} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]}_{M_1^2} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]}_{M_2^2} \cup \underbrace{\left[\frac{8}{9}, 1\right]}_{M_3^2} \ldots$

Notons $M_h^n = [a_h^n, b_h^n]$ et $\overbrace{M_h^n} = ]a_h^n, b_h^n[$ et étudions $a_h^n$ et $b_h^n$ extrémités des ces intervalles.
Par construction :

$$a_{2h}^{n+1} = a_h^n, \quad b_{2h}^{n+1} = \frac{2a_h^n + b_h^n}{3} = a_{2h}^{n+1} + \frac{1}{3^n} \quad \text{et} \quad b_{2h+1}^{n+1} = b_h^n, \quad a_{2h+1}^{n+1} = \frac{a_h^n + 2b_h^n}{3} = b_{2h}^{n+1} - \frac{1}{3^n}$$

On voit (par récurrence) alors que la décomposition en base 3 de $a_k^{n+1}$ et $b_k^{n+1}$ s'arrête avec le terme $\frac{a}{3^n}$, où $a \in \{0,1,2\}$. Et mieux pour $a_h^n$, il s'agit de $\frac{0}{3^n}$ ($h$ pair) ou $\frac{2}{3^n}$ ($h$ impair) et pour $b_h^n$, il s'agit de $\frac{1}{3^n}$ ($h$ pair) ou $\frac{0}{3^n}$ ($h$ impair).
En effet, ceci est vraie par exemple pour $n = 2$ :
$a_0^2 = 0 = [0,00]_3$, $b_0^2 = \frac{1}{9} = [0,01]_3$, $a_1^2 = \frac{2}{9} = [0,02]_3$, $b_1^2 = \frac{1}{3} = [0,10]_3$, $a_2^2 = \frac{2}{3} = [0,20]_3$, $b_2^2 = \frac{7}{9} = [0,21]_3$ et $a_3^2 = \frac{8}{9} = [0,22]_3$, $b_3^2 = 1 = [1,00]_3$.
On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}
\forall\, h \in [\![0,n]\!], \quad x \in \overbrace{M_{2h}^{n+1}} &\Longleftrightarrow x \in \overbrace{M_h^n} \text{ et } x \leqslant a_{2h}^{n+1} + \tfrac{1}{3^n} \\
&\Longleftrightarrow x \in M_h^n \text{ et } a_n(x) = 0 \\
\forall\, h \in [\![0,n]\!], \quad x \in \overbrace{M_{2h+1}^{n+1}} &\Longleftrightarrow x \in \overbrace{M_h^n} \text{ et } x \geqslant b_{2h}^{n+1} - \tfrac{1}{3^n} \\
&\Longleftrightarrow x \in M_h^n \text{ et } a_n(x) = 2
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $x \in K$,
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in K_n$ et donc $a_n(x) \in \{0,2\}$.
Réciproquement si $x \notin K$,
Alors, il existe $i$ tel que $x \in K_i$ et $x \notin K_{i+1}$ et donc $a_{i+1}(x) = 1$

$$\boxed{\text{Donc } x \in K \text{ ssi } \forall\, i \in \mathbb{N},\ a_n(x) \neq 1}$$

(g) Supposons que $K$ est dénombrable.
Alors on peut écrire $K = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ avec pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, $a_n(x_k) \in \{0,2\}$.
On applique alors un « argument diagonal à la Cantor » :
on considère $y_i = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i(x_i) = 2 \\ 2 & \text{si } a_i(x_i) = 0 \end{cases}$
Et enfin, on note $y = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y_k}{3^k}$.
Alors d'après la question précédente,
— $y \in K$ (tout les $a_k(y) \neq 1$)
— $y \notin \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ (car $a_k(y) \neq a_k(x_k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$).
On a donc trouver un élément de $K$ qui n'est pas dans l'énumération. Contradiction.

$$\boxed{\text{Donc } K \text{ n'est pas dénombrable.}}$$

**Remarques !**

*Dans la construction de l'intégrale de Lebesgue, les ensemble de mesure nulle sont très importants, ils permettent de rendre convergente des sommes divergentes a priori, mais sur des ensembles de mesure nulle. C'est ensemble sont alors définit à l'aide de la tribu borélienne des ouverts de $\mathbb{R}$.*
*Ici, ces ensembles de mesure nulle s'obtiennent simplement avec l'intégrale de Kurzweil-Henstock.*
*Dans les deux cas, on définit l'espace $L_1(I)$ des fonctions intégrables sur $I$, il est complet (toute suite de Cauchy converge), à condition de dire que $f = g$ ssi $\{x \in I \mid f(x) \neq g(x)\}$ est un ensemble de mesure nulle (cela est nécessaire, pour assurer l'unicité de la limite).*