MPSI 3 - Fermat Le 01.06.18
2017-2018

Devoir surveillé n°10
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrement) selon la qualité des copies.

Exercice

Le sujet est le dernier exercice de la seconde épreuve E3A MP 2018

On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \dots, X_n$: si $k_1, \dots, k_n$ sont les valeurs prises respectivement par $X_1, \dots, X_n$, alors U_n prend la valeur $|S|$ où $S = \{k_1, \dots, k_n\}$ pour tout $(k_1, \dots, k_n) \in [\![1, \ell]\!]^n$.

1. On suppose dans cette question seulement que $n = 2$ et $\ell \geq 2$.
   (a) Ici $n = 2$, il n'y a que deux variables aléatoires : X_1 et X_2.
   Il y a deux options incompatibles : $X_1 \neq X_2 \Longrightarrow U_2 = 2$ ou bien $X_1 = X_2 \Longrightarrow U_2 = 1$. /0,5
   $$\boxed{U_2(\Omega) = \{1, 2\}}$$
   (b) On a les équivalences : $U_2 = 1 \Longleftrightarrow X_1 = X_2 \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\ell} (X_1 = k \cap X_2 = k)$.
   Donc, par incompatibilité puis indépendance :
   $$\mathbf{P}(U_2 = 1) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(X_1 = k \cap X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(X_1 = k)\mathbf{P}(X_2 = k) = \frac{\ell}{\ell^2} = \frac{1}{\ell}$$
   car la loi suivie par X_1 et X_2 est la loi uniforme sur $[\![1, \ell]\!]$.
   Comme la somme des probabilités vaut 1 : /1,5
   $$\boxed{\mathbf{P}(U_2 = 1) = \frac{1}{\ell} \qquad \mathbf{P}(U_2 = 2) = \frac{\ell - 1}{\ell}}$$
   (c) On a alors
   $$\mathbf{E}(U_2) = 1\frac{1}{\ell} + 2\frac{\ell - 1}{\ell}$$ /1
   $$\boxed{\mathbf{E}(U_2) = \frac{2\ell - 1}{\ell}}$$
2. On se propose de simuler en Python la variable aléatoire U_n pour $n = 10$ dans le cas où $\ell = 25$.
   (a)
```python
import random as rd

def simulU(n,l):
    """simulation de U_n, pour n et l donnés en argument"""
    liste=[]
    for k in range(n):
        X=rd.randint(1,l)
        if X not in liste :
            liste.append(X)
    return(len(liste))

print(simulU(10,25))
```
   /1
   (b) On exploite
   $$\boxed{\text{la loi faible des grands nombres : avec } S_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} U_{10}^k.}$$ /1
   Chaque U_{10}^k suit la loi de U_{10} et formant des variables aléatoires mutuellement indépendantes.
   Alors chaque U_{10}^k et S_N ont la même espérance $\mathbf{E}(U_{10})$:
   $$\forall\, \epsilon > 0, \qquad \lim_{N \to \infty} \mathbf{P}(|S_N - \mathbf{E}(U_{10})| < \epsilon) = 1$$
   On fait le calcul d'un grand nombre N de simulation de U_{10}. La moyenne est une bonne approximation de $\mathbf{E}(X)$ (estimation !)

```python
def espU(N):
    S=0
    for k in range(N):
        S+=simulU(10,25)
    return(S/N)
```

/1

Remarques !

On trouve informatiquement pour une simulation : 8,3615 (puis 8,3701 et 8,3913...pour deux autres simulations).

Alors que $\mathbf{E}(U_{10}) = 25\left(1 - \left(\frac{24}{25}\right)^{10}\right) \approx 8,37918\ldots$ *(formule trouvée plus bas)*

3. U_n peut prendre toutes valeurs entières plus petite que n et que ℓ. /0,5

$$\boxed{U_n(\Omega) = [\![1, \min(n, \ell)]\!]}$$

4. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1, \ell]\!]$.
La loi de probabilité est uniforme, si l'on note $S = \{a_1, \ldots a_k\} \subset [\![1, \ell]\!]$, alors /1

$$\mathbf{P}(X_i \in S) = \mathbf{P}(X_i = a_1 \cup X_i = a_2 \cup \ldots X_i = a_k) = \sum_{h=1}^{k} \mathbf{P}(X_i = a_h) = \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{\ell} = \frac{k}{\ell}$$

par incompatibilité puisque X_i est une variable aléatoire.
Puis, comme $k = |S|$:

$$\boxed{\mathbf{P}(X_i \in S) = \frac{|S|}{\ell}}$$

5. Soit a dans $[\![1, \ell]\!]$. Les événements $(X_1 \neq a), \ldots, (X_{n-1} \neq a)$ sont indépendants : /1

$$\boxed{\mathbf{P}(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_i \neq a) = \left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1}}$$

6. Puisque X_n est une variable aléatoire qui prend les valeurs de 1 à ℓ, on a l'équivalence :

$$[X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n] \Longleftrightarrow \bigcup_{a=1}^{\ell} (X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a, X_n = a)$$

Puis comme ces événements sont incompatibles (on ne peut avoir $X_n = a$ et $X_n = a'$ si $a \neq a'$).

$$\mathbf{P}\left(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n\right) = \sum_{a=1}^{\ell} \mathbf{P}\left(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a, X_n = a\right)$$

Puis par indépendance entre $X_n = a$ et $(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a)$ (lemme des coalitions) :

$$\mathbf{P}\left(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n\right) = \sum_{a=1}^{\ell} \mathbf{P}(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) \times \mathbf{P}(X_n = a) = \sum_{a=1}^{\ell} \left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1} \frac{1}{\ell}$$

/1,5

$$\boxed{\mathbf{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1}}$$

7. On peut faire un raisonnement équivalent au précédent,
mais au lieu de raisonner sur X_n, qui est un singleton ; on raisonne sur $X_1, \ldots X_{n-1}$.
Comme $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}(\Omega) = \mathcal{P}_\ell$ où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$, on a :

$$[X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n] \Longleftrightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{P}_\ell} ((X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = S, X_n \notin S)$$

Puis par incompatibilité et indépendance de X_n de $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$, on a /2

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) &= \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \left[\mathbf{P}(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) \times \mathbf{P}(X_n \notin S)\right] \\
&= \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \left[\mathbf{P}(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) \times (1 - \mathbf{P}(X_n \in S))\right]
\end{aligned}$$

Et donc, avec le résultat de la question 4 :

$$\boxed{\mathbf{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbf{P}(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell}\right)}$$

où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$.

8. Soit $n \geqslant 3$. $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$.
On les ordonne en fonction de leur cardinal. On note donc

$$\binom{[\![1, \ell]\!]}{k} = \{S \in \mathcal{P}_\ell \text{ tel que } |S| = k\}$$

$$\mathbf{E}(U_{n-1}) = \sum_{k=1}^{\min(n,\ell)} k\mathbf{P}(U_{n-1} = k) = \sum_{k=1}^{\min(n,\ell)} k \sum_{S \in \binom{[\![1,\ell]\!]}{k}} \mathbf{P}(X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} |S|\mathbf{P}(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S)$$

Or d'après la question précédente :

$$\mathbf{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbf{P}(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) - \frac{1}{\ell} \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} |S|\mathbf{P}(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S)$$

Or, comme $\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbf{P}(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) = 1$ (car $\mathcal{P}_l = (X_1, \ldots, X_{n-1})(\Omega)$).

$$\mathbf{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = 1 - \frac{1}{\ell}\mathbf{E}(U_{n-1})$$

Ainsi *\/2*

$$\boxed{\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - \mathbf{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n))}$$

9. Ainsi avec la question 5. : $\mathbf{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = n\frac{1}{\ell}\left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1}$, on peut affirmer :

$$\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell\left(1 - \left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1}\right)$$

Et donc par changement de variable : *\/1*

$$\boxed{\mathbf{E}(U_n) = \ell\left(1 - \left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n}\right)}$$

10. ℓ est fixé. $\left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi *\/1,5*

$$\boxed{\lim \mathbf{E}(U_n) = \ell. \text{ Tous les nombres (de 1 à } \ell\text{) sont tirés}}$$

11. n est fixé. $\left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^n \underset{\ell\to\infty}{=} 1 - \frac{n}{\ell} + o(\frac{1}{\ell})$. Ainsi *\/1,5*

$$\boxed{\lim \mathbf{E}(U_n) = n. \text{ Les } n \text{ tirages ne sont jamais identiques (tous différents)}}$$

12. Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.
   (a) En fait, cette situation (anniversaires) se modélise exactement comme pour les parties précédentes avec $\ell = 365$.
   On trouve donc *\/1*

$$\boxed{\mathbf{E}(D_n) = 365\left(1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n\right)}$$

   (b) D'après la question 10 : *\/1*

$$\boxed{\text{Ce nombre moyen tend vers 365 lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

Problème. Lemme de Fekete et théorème de Erdös-Szekeres

Le sujet est une « adaptation » de la première épreuve Mines-Pont MP 2018

A. Préliminaires

1. Puisque $X(\Omega)=\{1,\dots,n\}$, on a pour tout $m\in\mathbb{N}_n$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{m-1}\underbrace{k\mathbf{P}(X=k)}_{k\leqslant m-1} + \sum_{k=m}^{n}\underbrace{k\mathbf{P}(X=k)}_{k\leqslant n}\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{m-1}(m-1)\mathbf{P}(X=k) + \sum_{k=m}^{n} n\mathbf{P}(X=k) = (m-1)\sum_{k=1}^{m-1}\mathbf{P}(X=k) + n\sum_{k=m}^{n}\mathbf{P}(X=k)\\ &\leqslant (m-1)\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(X=k) + n\mathbf{P}(\bigcup_{k=m}^{n}[X=k])\end{aligned}$$

/1,5

$$\boxed{\mathbf{E}(X)\leqslant (m-1)+n\mathbf{P}(X\geqslant m)}$$

2. L'application $x\mapsto \ln x$ est croissante sur $[1,n]$.

$$\forall\, k\in[\![2,n]\!], \forall\, x\in[k-1,k] : \qquad \ln(x)\leqslant \ln k$$

$$\forall\, k\in[\![2,n]\!] : \qquad \int_{k-1}^{k}\ln(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k}\ln k\mathrm{d}x = \ln k$$

$$\int_{1}^{n}\ln x\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n}\ln k$$

Puis comme d'une part : une primitive de $x\mapsto \ln x$ est $x\mapsto x\ln x - x$ et d'autre part : $\ln 1 = 0$; /1,5

$$\boxed{n\ln n - n + 1 = [x\ln x - x]_1^n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln k}$$

Et donc

$$\ln\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n\right] \leqslant \ln(n^n) - \ln(e^n) + 1 \leqslant \ln(\prod_{k=1}^{n}k) = \ln(n!)$$

Ainsi, en composant par l'application exponentielle, croissante : /1

$$\boxed{\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!}$$

B. Le lemme de sous-additivité de Fekete

1. Soit $n\in\mathbb{N}$, $U_n=\{u_k, k\geqslant n\}$.
   L'ensemble U_n est une partie de $\mathbb{R}$, bornée car (u_n) est bornée,
   donc U_n admet une borne inférieure $\underline{u}_n$ et une borne supérieure $\overline{u}_n$. /1

   $$\boxed{\text{Les suites } (\underline{u}_n) \text{ et } (\overline{u}_n) \text{ sont bien définies}}$$

   Par ailleurs $U_{n+1}\subset U_n$ (si $x\in U_{n+1}$, $x=u_k$ avec $k\geqslant n+1$ et donc $x\in U_k$),
   donc tout minorant (resp. majorant) de U_n est un minorant (resp. majorant) de U_{n+1}.
   Ainsi $\underline{u}_n$ (resp. $\overline{u}_n$) est un minorant (resp. majorant) de U_{n+1}.
   Or $\underline{u}_{n+1}$ est le plus grand des minorants de U_{n+1}, donc $\underline{u}_{n+1}\geqslant \underline{u}_n$
   de même $\overline{u}_{n+1}$ est le plus petit des majorant de U_{n+1} donc $\overline{u}_{n+1}\leqslant \overline{u}_n$. /1

   $$\boxed{\text{Par conséquent : la suite } (\underline{u}_n) \text{ est croissante et la suite } (\overline{u}_n) \text{ est décroissante}}$$

2. On va montrer successivement :

   1- que $\overline{u}$ est plus grande que u.

   2- puis considérer une suite plus grande que u, décroissante et montrer qu'elle est plus petite que $\overline{u}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in U_n$, donc $\overline{u}_n \geqslant u_n$ car $\overline{u}_n$ est un majorant de U_n et $u_n \in U_n$.

Donc la suite $\overline{u}$ est plus grande que la suite u. */0,5*

Soit v_n une suite plus grande que u, décroissante.

Donc pour tout entier k, $v_k \geqslant u_k$ (car $u \preceq v$).

Et comme v_k est décroissante : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant n$: $v_n \geqslant v_k$.

A partir de ces deux inégalités, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, k \geqslant n, \qquad v_n \geqslant v_k \geqslant u_k$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n \text{ majorant de } U_n \qquad \Longrightarrow v_n \geqslant \overline{u}_n = \sup U_n$$

Ainsi $\overline{u} \preceq v$ */1*

$\boxed{\overline{u} \text{ est la plus petite suite (au sens de } \preceq \text{) qui est décroissante et plus grande que } u.}$

De même, on a la démonstration symétrique :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in U_n$, donc $\underline{u}_n \leqslant u_n$ car $\underline{u}_n$ est un minorant de U_n et $u_n \in U_n$.

Donc la suite $\underline{u}$ est plus petite que la suite u. */0,5*

Soit w_n une suite plus petite que u, croissante.

Donc pour tout entier k, $w_k \leqslant u_k$ (car $w \preceq u$).

Et comme w_k est croissante : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant n$: $w_n \leqslant w_k$.

A partir de ces deux inégalités, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, k \geqslant n, \qquad w_n \leqslant w_k \leqslant u_k$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n \text{ minorant de } U_n \qquad \Longrightarrow w_n \leqslant \underline{u}_n = \inf U_n$$

Ainsi $w \preceq \underline{u}$ */1*

$\boxed{\underline{u} \text{ est la plus petite grande suite (au sens de } \preceq \text{) qui est croissante et plus petite que } u.}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{v}_n \geqslant v_n \geqslant u_n$, donc $u \preceq v \preceq \overline{v}$.
   Par construction, la suite $\overline{v}$ est décroissante. Et elle est plus grande que u, donc d'après la question précédente : */1*
   $$\boxed{\overline{u} \preceq \overline{v}}$$

4. $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont respectivement décroissante et croissante. Elles sont bornées. Elles convergent.
   Donc, ici, on a l'équivalence : $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si $\lim \overline{u} = \lim \underline{u}$.
   Supposons que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes.
   On a donc $\lim \overline{u} = \lim \underline{u}$.
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\underline{u}_n \leqslant u_n \leqslant \overline{u}_n$.
   D'après le théorème de convergence par encadrement : u converge (et vers la limite commune).
   Réciproquement, supposons que u converge vers ℓ.
   Soit $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < \epsilon$ donc $\ell - \epsilon < u_n < \ell + \epsilon$.
   Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $\forall\, k \geqslant n$, $\ell - \epsilon < u_k < \ell + \epsilon$ donc $U_n \subset]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$.
   Donc pour tout $n \geqslant N$, $\overline{u}_n \in [\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$ (avec la borne supérieure, on ferme l'intervalle),
   et de même $n \geqslant N$, $\underline{u}_n \in [\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$ (avec la borne inférieure, on ferme l'intervalle),
   Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $|\overline{u}_n - \ell| < \epsilon$ et $|\underline{u}_n - \ell| < \epsilon$.
   Donc les suites $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont convergentes vers la même limite $\ell = \lim(u_n)$.
   Alors, d'après la remarque initiale : $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes. */2*

   $\boxed{\overline{u} \text{ et } \underline{u} \text{ sont adjacentes si et seulement si } u \text{ converge. Dans ce cas, } \lim u = \lim \overline{u} = \lim \underline{u}}$

Dans le reste de cette partie, on suppose que u est positive *et* sous-additive.

5. Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geqslant 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Par récurrence sur $s \geqslant 2$ (relativement triviale) :
   $$u_{\sum\limits_{k=1}^{s} n_k} \leqslant \sum_{k=1}^{s} u_{n_k}$$
   L'initialisation correspond à la propriété de sous-additivité. Le passage de s à $s+1$ également.
   $$u_m = u_{qn+r} = u_{\sum\limits_{k=1}^{q-1} n + (n+r)} \leqslant u_{\sum\limits_{k=1}^{q-1} n} + u_{n+r} \leqslant \sum_{k=1}^{q-1} u_n + u_{n+r} = (q-1)u_n + u_{n+r}$$
   $$\boxed{u_m \leqslant (q-1)u_n + u_{n+r}}$$ */1*

On divise donc par m :

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{(q-1)u_n}{m} + \frac{u_{n+r}}{m} \leqslant \frac{(q-1)n}{m}\frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m}$$

Or $m = qn + r$, donc $m - n - r = (q-1)n$ et ainsi /1

$$\boxed{\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m}}$$

6. On note $M_1 = \max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}$ (maximum d'un ensemble fini).
Puis comme $m - n - r \leqslant m$, alors $\frac{m-n-r}{m} \leqslant 1$ et également $\frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m} \leqslant \frac{M}{2n}$.
Donc
$$\forall\ m \geqslant 2n, \qquad \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{2u_n + M}{2n}$$
Enfin, on considère $M = \max\{\frac{u_1}{1}, \frac{u_2}{2}, \cdots \frac{u_{2n-1}}{2n-1}, \frac{2u_n+M}{2n}\}$ (maximum d'un ensemble fini).
Et donc $\forall\ m \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_m}{m} \leqslant M$. Ainsi $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
Comme, par ailleurs, elle est positive : /1,5
$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée}}$$
Considérons la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par $x_m = \dfrac{m-n-r}{m} \cdot \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m}$.
pour tout $m \geqslant 2n$, $\dfrac{u_m}{m} \leqslant x_m$ et cette suite converge (pour $m \to \infty$) vers $\dfrac{u_n}{n}$.
Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ m \geqslant M$, $x_m < \dfrac{u_n}{n} + \epsilon$
donc pour tout $m \geqslant M$, tout $k \geqslant m$, $u_k < \dfrac{u_n}{n} + \epsilon$, donc U_m est majoré par $\dfrac{u_n}{n} + \epsilon$.
Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ m \geqslant M$, $\overline{\left(\dfrac{u}{\mathrm{id}}\right)}_m \leqslant \dfrac{u_n}{n} + \epsilon$.
On sait par ailleurs que $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée donc $\overline{\left(\dfrac{u}{\mathrm{id}}\right)}_m$ converge.
Nécessairement : $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m} < \dfrac{u_n}{n} + \epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$. Donc : /2
$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n}}$$

7. On note $\ell = \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m}$.
La suite constante ℓ minore $\frac{u_n}{n}$ est croissante (d'une certaine façon), donc $\ell \preceq \underline{\left(\dfrac{u}{\mathrm{id}}\right)}$.
Et donc en passant à la limite ($\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée) : $\ell \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{u_n}{n}$.
L'inégalité est toujours vérifiée dans l'autre sens : $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ a_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ a_n$,
donc les suites $\underline{\left(\dfrac{u}{\mathrm{id}}\right)}$ et $\overline{\left(\dfrac{u}{\mathrm{id}}\right)}$ sont adjacentes (il suffit de montrer qu'elles ont même limite)
Ainsi, d'après 4., /1,5
$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

C. Une application probabiliste

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, donc
si $\omega \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} [X_k < x]$,
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\omega \in [X_k < k]$, i.e. $X_k(\omega) < x$.
Et donc $Y(\omega) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) < \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x = x$.
Et ainsi $\omega \in [Y_n < x]$.
Par conséquent : $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} [X_k < x] \Rightarrow [Y_n < x]$, et donc $\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} [X_k < x]\right) \leqslant \mathbf{P}[Y_n < x]$. /1,5

Or par indépendance mutuelle des (X_k) : $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k < x]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k < x) = \prod_{k=1}^{n} 1 = 1$,

car toutes les variables aléatoires suivent la même loi, celle de X_1.

Et ainsi, comme une probabilité toujours plus petite que 1 : $\mathbf{P}(Y_n < x) = 1$.

/1

$$\boxed{\text{Si pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(X_k < x) = 1, \text{ alors } \mathbf{P}(Y_n < x) = 1}$$

On démontre de même que $\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \geqslant x] \Rightarrow [Y_n \geqslant x]$, puis $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \geqslant x]\right) \leqslant \mathbf{P}[Y_n \geqslant x]$, /1

puis par indépendance mutuelle : $\mathbf{P}(Y_n \geqslant x) \geqslant \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \geqslant x) = [\mathbf{P}(X_i \geqslant x)]^n$,

car toutes les variables aléatoires suivent la même loi, celle de X_1.

/1

$$\boxed{\text{Si pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(X_k \geqslant x) > 0, \text{ alors } \mathbf{P}(Y_n \geqslant x) > 0}$$

2. Soit $\omega \in \left(\{Y_m \geqslant x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right)$. Alors

$$\begin{aligned} Y_{m+n}(\omega) &= \frac{1}{m+n}\sum_{k=1}^{n+m} X_(\omega) = \frac{m}{m+n}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) + \frac{n}{m+n}\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \\ & \frac{m}{m+n}Y_m(\omega) + \frac{n}{m+n}\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geqslant \frac{m}{m+n}x + \frac{n}{n+m}x = x \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\left(\{Y_m \geqslant x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geqslant x\}}$$ /1,5

Les variables aléatoires X_i étant mutuellement indépendants, le lemme des coalition affirme que Y_m et $\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ sont indépendantes, donc

$$\mathbf{P}\left(\{Y_m \geqslant x\}\right)\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right) = \mathbf{P}\left(\{Y_m \geqslant x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) \leqslant \mathbf{P}(Y_{m+n} \geqslant x)$$

Les lois X_i sont identiques, $\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\sum_{k=m+1}^{m+n} X_{k-m} = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suivent la même loi,

Et donc $\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geqslant x\right) = \mathbf{P}(Y_n \geqslant x)$. Donc /2

$$\boxed{\mathbf{P}(Y_{n+m} \geqslant x) \geqslant \mathbf{P}(Y_m \geqslant x)\mathbf{P}(Y_n \geqslant x)}$$

3. Notons $u_n = -\ln\left(\mathbf{P}(Y_n \geqslant x)\right)$.
   $u_n \geqslant 0$, car $(\mathbf{P}(Y_n \geqslant x)) \leqslant 1$, donc $\ln\left(\mathbf{P}(Y_n \geqslant x)\right) \leqslant 0$.
   D'après la réponse précédente, la suite u_n est sous-additive :

$$\ln[\mathbf{P}(Y_{n+m} \geqslant x)] \geqslant \ln[\mathbf{P}(Y_m \geqslant x)\mathbf{P}(Y_n \geqslant x)] = \ln[\mathbf{P}(Y_m \geqslant x)] + \ln[\mathbf{P}(Y_n \geqslant x)]$$

$$u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$$

Donc d'après la partie précédente, $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n = \left(-\ln\left([\mathbf{P}(Y_n \geqslant x)]^{1/n}\right)\right)_n$ converge.

Ce qui permet d'affirmer, en composant avec $t \mapsto \exp(-t)$, continue : /1

$$\boxed{\left((\mathbf{P}(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$$

D. Le théorème de Erdös-Szekeres

1. Notons, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, /0,5

$\mathcal{P}_s :\ll$ pour toute liste $\ell = (\ell_1, \dots \ell_r)$ conduisant par le processus à s piles notées $P_1, \dots P_s$
$\forall\ z \in P_s, \exists\ b = (b_1, \dots, b_s)$ telle que $\forall\ i \in \mathbb{N}_{s-1}, b_i \in P_i,\ b_i \geqslant b_{i+1}$ et $b_s = z\ \gg$

— Si il n'y a qu'une pile alors la liste $b = (z)$ vérifie les conclusions de $\mathcal{P}_1$.
$\mathcal{P}_1$ est vraie. /1
— Soit $s \in \mathbb{N}^*$. Soit ℓ à qui l'application du processus conduit à $s+1$ piles : $P_1, \dots P_s, P_{s+1}$.
Soit z un jeton de la dernière pile. On le note b_{s+1}.
On extrait de ℓ, les éléments de la pile P_{s+1}, on obtient une liste ℓ'.
Lorsqu'on applique le processus à ℓ', on assiste exactement aux mêmes opérations que pour ℓ, sans les opérations qui conduisent à la pile P_{s+1}.
On obtient donc s piles qui sont exactement les piles $P_1, \dots P_S$ de ℓ'.
On peut appliquer $\mathcal{P}_s$ alors à ℓ et "ses" piles.
Donc $\forall\ z' \in P_s, \exists\ b = (b_1, \dots, b_s)$ telle que $\forall\ i \in \mathbb{N}_{s-1}, b_i \in P_i,\ b_i \geqslant b_{i+1}$ et $b_s = z'$.
Par ailleurs, comme $z \in P_{s+1}$, il existe $z_0 \in P_s$ tel que $z_0 > z$, sinon $z \in P_s$ (car z plus grand que tous les éléments de P_s).
On prend donc $z' = z_0$. /2
On associe alors une suite $b = (b_1, \dots, b_s)$ tel que $\forall\ i \in \mathbb{N}_{s-1}, b_i \in P_i, b_i \geqslant b_{i+1}$ et $b_s = z_0 < z$.
Avec $b_{s+1} = z > z_0 = b_s$, on peut alors affirmer :

$$\exists\ b' = (b_1, \cdots b_s, b_{s+1}) \text{ telle que } \forall\ i \in \mathbb{N}_s, b_i \in P_i,\ b_i \geqslant b_{i+1} \text{ et } b_{s+1} = z$$

Ainsi $\mathcal{P}_{s+1}$ est vraie.

Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ pour toute liste $\ell = (\ell_1, \dots \ell_r)$ conduisant par le processus à s piles : $P_1, \dots P_s$
$\forall\ z \in P_s, \exists\ b = (b_1, \dots, b_s)$ telle que $\forall\ i \in \mathbb{N}_{s-1}, b_i \in P_i,\ b_i \geqslant b_{i+1}$ et $b_s = z$

2. a est de longueur $pq+1$.
On applique le processus à a. Supposons que cela nous conduit à la création de s piles.
— si $s \geqslant q+1$,
alors avec la question précédente, on peut extraire de a une liste décroissante de s éléments.
On lui extrait alors une sous-suite de $q+1$ éléments.
— si $s \leqslant q$,
alors au moins une des piles contient $p+1$ éléments.
sinon, on aurait placé un nombre d'éléments dans les piles inférieur à $q \times p$. Absurde.
Cette pile forme, par construction, une suite extraite de a strictement croissante.
On lui extrait alors une sous-suite de $p+1$ éléments /1,5

La liste a admet au moins une liste extraite croissante de longueur $p+1$
ou une liste extraite décroissante de longueur $q+1$.

Remarques !
Lorsque a est infini, cela nous rappelle « le lemme des pics », d'une certaine façon.

E. Comportement asymptotique d'une suite aléatoire

1. $A_1(\omega) = B(\omega)(1)$ et $A_2(\omega) = B(\omega)(2)$.
Or B est à valeurs dans S_n, donc nécessairement : $\forall\ \omega \in \Omega,\ B(\omega)(1) \neq B(\omega)(2)$.
Et donc $\mathbf{P}(A_1 = 1 \cap A_2 = 1) = 0$.
Alors que $\mathbf{P}(A_1 = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n} = \mathbf{P}(A_2 = 1)$.

Donc les variables aléatoires réelles $A_1, A_2, \dots, A_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes

2. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ et $s = (s_1, \dots, s_k)$ une liste croissante de longueur k d'éléments de $\{1, \dots, n\}$.
On note A^s l'événement : « la liste $(A_{s_1}, \dots, A_{s_k})$ est croissante ». On va conditionner le calcul par la valeur prise par la variable aléatoire B. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(A^s) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{P}_{B=\sigma}(A^s)\mathbf{P}(B)$$

Puis sachant que $B = \sigma$, A^s : $\ll\ A_{s_1} = B(s_1) \leqslant A_{s_2} = B(s_2) \cdots \leqslant A_{s_k} = B(s_k)\ \gg$.
et donc $\mathcal{P}_{B=\sigma}(A^s) = \begin{cases} 1 & \text{si } B(s_1) \leqslant B(s_2) \cdots \leqslant B(s_k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Il s'agit donc de trouver la probabilité que la suite $(B(s_1) \leqslant B(s_2) \cdots \leqslant B(s_k))$ soit croissante.
La loi sur B étant uniforme, on peut raisonner par dénombrement.
Pour obtenir une permutation B dont l'extraction $(B(s_1) \leqslant B(s_2) \cdots \leqslant B(s_k))$ est croissante, il faut et il suffit :
— extraire un ensemble de$k$ éléments de $\{1, 2, \dots n\}$, ils formeront $\{B(s_1), B(s_2), \cdots B(s_k)\}$.
Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.

— ordonner cet ensemble, de manière à le rendre croissant.
Il n'y a qu'une possibilité.
— permuter les $n-k$ autres éléments non considérés (les $B(t)$ pour $t \notin \{s_1, \dots s_k\}$).
Il y a $(n-k)$ possibilités. /2,5

$$\mathbf{P}(A^s) = \frac{\binom{n}{k} \times 1 \times (n-k)!}{n!} = \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!n!}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(A^s) = \frac{1}{k!}.}$$

3. Considérons l'application $\varphi : S_n \to S_n$, $\sigma \mapsto (n+1-\sigma(1), n+1-\sigma(2), \dots n+1-\sigma(n))$.
$\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$, donc φ est bijective.
On note $B' = \varphi \circ B$. C'est une variable aléatoire à valeur dans S_n, de même loi que S_n (uniforme).
De même A' à partir de B', C'_n et D'_n à partir de A'.
C'_n a la même loi que C_n (et D'_n la même loi que D_n).
Or on a l'équivalence des événements : /2

$$\begin{aligned} C'_n = k &\iff k \text{ est la longueur de la plus longue liste croissante extraite de } A' = (B'(1), \dots B'(n)) \\ &\iff k \text{ est la longueur de la plus longue liste croissante extraite de } (\varphi \circ B(1), \dots \varphi \circ B(n)) \\ &\iff k \text{ est la longueur de la plus longue liste croissante extraite de } (n+1-B(1), \dots n+1-B(n)) \\ &\iff k \text{ est la longueur de la plus longue liste décroissante extraite de } A = (B(1), \dots B(n)) \\ &\iff D_n = k \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } C_n\ (C'_n) \text{ et } D_n \text{ ont le même loi.}}$$

D'après la question D.2., une permutation de $\{1, \dots pq+1\}$ éléments admet toujours ou une sous-suite croissante de longueur $p+1$ ou une sous-suite décroissante de longueur $q+1$.
On va donc s'intéresser à la variable aléatoire $C_n + D_n$.
Notons d'abord que $\mathbf{E}(C_n + D_n) = \mathbf{E}(C_n) + \mathbf{E}(D_n) = 2\mathbf{E}(C_n)$ car C_n et D_n ont même loi.
Puis pour tout $\omega \in \Omega$:

$$(C_n + D_n)(\omega) = C_n(\omega) + D_n(\omega) \geqslant \sqrt{n}$$

En effet, si on note $p = q = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$, la partie entière de $\sqrt{n-1}$, alors $pq+1 \leqslant n$.
On peut donc extraire de $B(\omega)$ (en tout cas de ces $pq+1$ premiers éléments) :
— ou bien une sous-suite croissante de $p+1$ éléments : $C_n(\omega) \geqslant p \geqslant \sqrt{n-1} \geqslant \sqrt{n} - 1$ car $(\sqrt{n-1}+1)^2 = n-1+1+2\sqrt{n-1} \geqslant n = (\sqrt{n})^2$ et $D_n(\omega) \geqslant 1$
— ou bien une sous-suite décroissante de $q+1$ éléments : $C_n(\omega) \geqslant 1$ et $D_n(\omega) \geqslant q+1 \geqslant \sqrt{n}-1$

$$2\mathbf{E}(C_n) = \sum_{\omega \in \Omega} (C_n + D_n)(\omega) \mathbf{P}(\{\omega\}) \geqslant \sqrt{n} \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sqrt{n}\mathbf{P}(\Omega) = \sqrt{n}$$ /2,5

$$\boxed{\mathbf{E}(C_n) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}}$$

4. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Soit $\omega \in [C_n \geqslant k]$,
Donc $A(\omega)$ admet (au moins) une sous-suite de longueur k croissante.
Donc il existe $s = (s_1, s_2, \dots s_k)$, croissante tel que $A_{s_1}(\omega) \leqslant A_{s_2}(\omega) \leqslant \dots \leqslant A_{s_k}(\omega)$
Ainsi $\omega \in \bigcup_{s \text{ tel que } |s|=k, s \text{ croissante}} A^s$ /1,5

$$[C_n \geqslant k] \subset \bigcup_{s \text{tel que} |s|=k, s \text{ croissante}} A^s \implies \mathbf{P}(C_n \geqslant k) \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{s \text{tel que} |s|=k, s \text{ croissante}} A^s \right)$$

Or ces événements A^s et $A^{s'}$ sont disjoint si $s \neq s'$:

$$\mathbf{P}(C_n \geqslant k) \leqslant \sum_{s \text{tel que} |s|=k, s \text{ croissante}} \mathbf{P}(A^s) = \frac{1}{k!} \sum_{s \text{tel que} |s|=k, s \text{ croissante}} 1$$

Or il y a $\binom{n}{k}$ telle sous-suite croissante : il suffit d'ordonner (de manière unique) l'ensemble s. /1,5

$$\boxed{\mathbf{P}(C_n \geqslant k) \leqslant \frac{\binom{n}{k}}{k!}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 1$. Le nombre $\alpha e\sqrt{n} \in \mathbb{R}_+^*$, donc $-\alpha e\sqrt{n} \in \mathbb{R}_-^*$.
   On note $K = \lfloor -\alpha e\sqrt{n} \rfloor$, la partie entière de $-\alpha e\sqrt{n} < 0$. Donc $K \leqslant -1$.
   On a $K \leqslant -\alpha e\sqrt{n} < K+1$.
   En multipliant par -1 : $-K \geqslant \alpha e\sqrt{n} > -K-1$. /1,5

$$\boxed{\text{avec } k = -K \in \mathbb{N}^*,\ k-1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k}$$

   C_n est une variable aléatoire entière, donc $[C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}] \iff [C_n \geqslant k]$.

$$\mathbf{P}(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \frac{\binom{n}{k}}{k!} = \frac{n!}{n-k)!}\left(\frac{1}{k!}\right)^2 \leqslant n(n-1)\cdots(n-k+1)\left(\frac{e}{k}\right)^{2k}$$

   en appliquant le résultat vue en question 2. avec $n = k$. Or $\dfrac{e}{k} \leqslant \dfrac{1}{\alpha\sqrt{n}}$,

$$\mathbf{P}(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{\sqrt{n}^{2k}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2k} \leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2k}$$

   Enfin, comme $\alpha > 1$, $\frac{1}{\alpha} < 1$ et donc $t \mapsto (\frac{1}{\alpha})^t$ est décroissante. Donc /2,5

$$\boxed{\mathbf{P}(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}}$$

6. On applique à C_n le résultat de A.1. Comme $C_n(\Omega) = \{1, 2, \dots n\}$, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{E}(C_n) \leqslant k-1+n\mathbf{P}(C_n \geqslant k) \iff \frac{\mathbf{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{k-1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\mathbf{P}(C_n \geqslant k)$$

   Et donc avec k défini comme précédemment : $k-1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k$ (on a $k \leqslant n$, au moins à partir de $n \geqslant (\alpha e)^2$) :

$$\frac{\mathbf{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant \alpha e + \sqrt{n}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}$$

   On prend $\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{n}} > 1$, alors :

$$\frac{\mathbf{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant (1+n^{-1/4})e + \sqrt{n}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2(\sqrt{n}+\sqrt[4]{n})e}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_n :\ &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2(\sqrt{n}+\sqrt[4]{n})e} = \sqrt{n}(1+n^{-1/4})^{-2e(\sqrt{n}+\sqrt[4]{n})} = \sqrt{n}\exp[-2e(\sqrt{n}+\sqrt[4]{n})\ln(1+n^{-1/4})] \\ &= \sqrt{n}\exp[-2e(\sqrt{n}+\sqrt[4]{n})(n^{-1/4}+o(n^{-1/4}))] = \sqrt{n}\exp(-2e\sqrt[4]{n}+o(\sqrt[4]{n})) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

   par croissance comparée. /3

$$\boxed{\text{Il existe une suite } (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ tendant vers 0 telle que, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\mathbf{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant (1+n^{-1/4})e + \varepsilon_n}$$

   Il suffit d'appliquer B.3. : on a deux suites bornées $u_n = \frac{\mathbf{E}(C_n)}{\sqrt{n}}$ et $v_n = (1+n^{-1/4})e + \varepsilon_n$,
   avec $u \preceq v$ et v convergente donc $\overline{\lim} v = \lim v = e$: /1

$$\boxed{\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\mathbf{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \text{ existe et } \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\mathbf{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant e.}$$

Remarques !

On a démontrer que $2 \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant e$.
Souvent en probabilité, où les résultats sont ératiques, on se concentre sur un encadrement de limite entre deux suites extraites maximalement ($\limsup$*) et minimalement (*$\liminf$*). Cela nous donne un « relativement »bon résultat ! Etonnement, c'est une stratégie qu'on retrouve également en analyse asymptotique dans le cadre de la théorie des nombres (arithmétique). Et on retrouve tout particulièrement* Erdös *dans cet univers.*