MPSI 3 - Fermat Le 21.09.18
2018-2019

Devoir surveillé n°1
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrment) selon la qualité des copies.

Exercice 1 - Méthode de Viète

On considère l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ dont on cherche les racines.

1. On pose $X = x - \alpha$, alors $x = X + \alpha$ et

$$x^3+ax^2+bx+c = (X+\alpha)^3+a(X+\alpha)^2+b(X+\alpha)+c = X^3+(3\alpha+a)X^2+(3\alpha^2+2a\alpha+b)X+(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)$$

/2

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En prenant, } \alpha = \dfrac{-a}{3}\text{, l'équation initiale devient } X^3 - 3pX - 2q = 0 \ (*) \\ \text{avec } p = \dfrac{1}{9}(a^2 - 3b) \text{ et } q = \dfrac{-1}{54}(4a^3 - 18ab + 27c)\end{array}}$$

2. On exploite la formule d'Euler puis le binôme de Newton :

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\right)$$

/1

$$\boxed{\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta}$$

3. On réalise le changement de variable demandé, cela donne :

$$X^3-3pX-2q = (2\sqrt{p}\cos\theta)^3-3p(2\sqrt{p}\cos\theta)-2q = 2p\sqrt{p}(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-2q = 2p\sqrt{p}\cos(3\theta)-2q$$

/1,5

$$\boxed{\text{Et l'équation } (*) \text{ devient l'équation en } \theta \text{ équivalente : } p\sqrt{p}\cos(3\theta) = q}$$

4. Ainsi, dans le cas $p^3 > q^2$ i.e. $\frac{q}{p\sqrt{p}} \in]-1,1[$, les solutions x de $(*)$ sont obtenue à partir de
   $\theta = \frac{1}{3}\arccos(\frac{q}{p\sqrt{p}})\ [\frac{2}{3}\pi]$ et $\theta' = \frac{-1}{3}\arccos(\frac{q}{p\sqrt{p}})\ [\frac{2}{3}\pi]$
   Cela donne a priori 6 solutions...
   Puis comme $x = X + \alpha$ et $X = 2\sqrt{p}\cos\theta$, on trouve (parité de cos) : /2

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{dans le cas } p^3 > q^2\text{, les racines de } (*) \text{ sont } x_1 = \alpha + 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos(\frac{q}{p\sqrt{p}})\right), \\ x_2 = \alpha + 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos(\frac{q}{p\sqrt{p}}) + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } x_3 = \alpha + 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos(\frac{q}{p\sqrt{p}}) + \frac{4\pi}{3}\right)\end{array}}$$

5. Considérons l'équation $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$.
   On considère donc $\alpha = \frac{-3}{3} = -1$ $(a = 3)$, ce qui conduit à l'équation :

$$X^3 - 3X + 1 = 0 \qquad p = 1, q = -\frac{1}{2}$$

   Et donc avec $2\cos\theta = X$, on trouve $\theta = \pm\dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{-1}{2} = \pm\dfrac{2\pi}{9} \quad [\frac{2\pi}{3}]$
   Finalement, on trouve : /2,5

$$\boxed{x_1 = -1 + 2\cos\frac{2\pi}{9} \qquad x_2 = -1 + 2\cos\frac{8\pi}{9} \qquad x_3 = -1 + 2\cos\frac{-4\pi}{9}}$$

Exercice 2 - A partir du sujet des OMI 2018

Un anti-triangle de Pascal est un tableau en forme de triangle équilatéral dans lequel sont disposés des nombres tels que, excepté pour les nombres placés sur la ligne du bas, chaque nombre soit égal à la valeur absolue de la différence entre les deux nombres situés juste en-dessous.
Par exemple, le tableau ci-dessous est un anti-triangle de Pascal de quatre lignes qui contient chaque entier entre 1 et 10

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Le but est de répondre à la question : *Existe-t-il des anti-triangle de Pascal de 2018 lignes qui contient tous les entiers de* 1 *à* $1+2+\cdots+2018$ *?*

1. Un anti-triangle de k lignes possède un nombre de nombres égal à $1+2+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. */1*

$$\boxed{\text{S'il possède que des entiers différents et consécutifs, on a donc } N = \frac{k(k+1)}{2}}$$

2. Ainsi avec $k = 2018$, on fait le calcul (sans calculatrice) */2*

$$\boxed{N(2018) = \frac{2018 \times 2019}{2} = 1009 \times 2019 = 18\,171 + 2\,019\,000 = 2\,037\,171}$$

3. Chaque ligne ($n-1^{\text{e}}$) est obtenue par soustraction des termes de la ligne suivantes (n^{e}),
Donc le plus grand écart en ligne $n-1$ est obtenue si on trouve M_n à côté de m_n. */1*

$$M_{n-1} \leqslant M_n - m_n \Rightarrow \boxed{M_n - M_{n-1} \geqslant m_n}$$

Puis par télescopage */1*

$$\boxed{M_j - M_i = \sum_{k=i+1}^{j} (M_k - M_{k-1}) \geqslant \sum_{k=i+1}^{j} m_k}$$

4. On a donc en particulier : $M_{2018} \geqslant M_1 + \sum_{k=2}^{2018} m_k = m_1 + \sum_{k=2}^{2018} m_k = \sum_{k=1}^{2018} m_k$
car $M_1 = m_1$ (un seul nombre en ligne 1).
Si T est bien un anti-triangle de Pascal, tous les coefficients sont différents, donc tous les m_k sont distincts.
On a donc $\sum_{k=1}^{2018} m_k \geqslant \sum_{k=1}^{2018} k = 2\,037\,171$.
A contrario, M_{2018} est au plus égal à $2\,037\,171$. */2*

$$\boxed{\text{Nécessairement } M_{2018} = 2\,037\,171 = \max(T)}$$

Il y a nécessairement égalités dans toutes les inégalités précédentes, on a $\sum_{k=1}^{2018} m_k = \sum_{k=1}^{2018} k$, ainsi : */2*

$$\boxed{\{m_1, m_2, \ldots m_{2018}\} = \{1, 2, \ldots 2018\} \text{ on parle de permutation de l'ensemble}}$$

Et de même (il n'y a que des égalités) : */1*

$$M_j - M_1 = \sum_{k=2}^{j} m_k \Rightarrow \boxed{M_j = \sum_{k=1}^{j} m_k}$$

5. On a alors puisque les $\{m_k\}$ forme une permutation de $\{1, \ldots 2018\}$,
pour tout $n \leqslant 1954$:

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \leqslant \sum_{k=1}^{1954} m_k \leqslant \sum_{k=1}^{1954} (2018-k+1) = \sum_{h=65}^{2018} h = \sum_{h=1}^{2018} h - \sum_{h=1}^{64} h = \sum_{h=1}^{2018} h - \frac{64 \times 65}{2} = \sum_{h=1}^{2018} h - 2020 < \sum_{h=1}^{2017} h$$

Donc */2*

$$\boxed{\text{pour tout } n \leqslant 1954,\ M_n < \sum_{h=1}^{2017} h.}$$

Remarques !

Pourquoi 1954 ? Simplement car ainsi, $\sum_{h=1}^{2019-1954} h > 2018$

6. On considère une ligne $n > 1954$ et on suppose qu'il existe sur cette ligne un nombre ℓ plus grand que $\sum_{h=1}^{2017} h$.
Les deux antécédents de ℓ sont $a > b$, on a donc $\ell = a - b$.
Et comme $a \leqslant \sum_{h=1}^{2018} h$, on a donc $b = a - \ell < 2018$. Donc nécessairement $b = m_{n+1}$, car d'après (4) les nombres plus petits que 2018 sont tous des minimums de leur ligne.
Or il ne peut y avoir qu'un seul nombre b vérifiant ces conditions sur la $(n+1)^{\text{e}}$ligne. /2

$$\boxed{\text{Il y a donc au plus deux nombres } \ell \text{ supérieur à } \sum_{h=1}^{2017} h \text{ sur chaque ligne } n \text{ pour } n > 1954}$$

On note M_n et m_n le plus grand et le plus petit nombre en ligne n de l'anti-triangle T considéré.
Montrer que

7. Au final, il n'y a aucun nombre plus petit que $\sum_{h=1}^{2017} h$ sur les lignes 1 à 1954.
Et il y a au plus deux tels nombres sur les lignes 1955 à 2017.
On peut donc placer au plus $2 \times (2017 - 1955 + 1) = 126$ des 2018 nombres compris entre $\sum_{h=1}^{2017} h$ et $\sum_{h=1}^{2018} h$ sur les lignes 1 à 2017 du triangle T.
Il y a donc au moins $2018 - 126 = 1892$ nombres compris entre $\sum_{h=1}^{2017} h$ et $\sum_{h=1}^{2018} h$ sur la ligne 2018 du triangle T.
Et ainsi, il y a au moins deux pairs de nombres consécutifs sur cette ligne compris entre $\sum_{h=1}^{2017} h$ et $\sum_{h=1}^{2018} h$ et dont la différence donne en valeur absolue un nombre strictement plus petit que 2018.
Et par conséquent, en ligne 2017, on trouve au moins deux éléments de $\{1, 2, \dots 2018\}$. Cela est impossible. /4

$$\boxed{\text{Il n'existe donc aucun anti-triangle de Pascal avec 2018 lignes}}$$

Remarques !

L'énoncé donne un anti-triangle de Pascal de 4 lignes. On peut en créer d'autres de 1, 2, 3 ou 4 lignes.
En reprenant l'argument vu ici, à partir de quelle taille un tel anti-triangle est nécessairement impossible ?
Ici $63 \approx \sqrt{2 \times 2018}$ *joue un rôle important. Est-ce* $n < 32$ *? ? ?*

Problème. Nombres de Catalan

En hommage à Eugène CATALAN, nous définissons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Tout au long de ce problème, nous étions quelques propriétés de ces nombres

A. Formules de récurrence

1. Quelques valeurs

(a) Les calculs donnent : /1

$$\boxed{C_0 = \binom{0}{0} = 1, \quad C_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = 1, \quad C_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = 2}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+2)(n+1)^2 n!n!} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)}\frac{1}{2n+1}\binom{2n}{n}$$

Ainsi, /1,5

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}C_n}$$

Remarques !

Surtout pas de récurrence ici !!

Même si on trouve ainsi une relation de récurrence...

On trouve alors /1

$$\boxed{C_3 = \frac{10}{4} \times 2 = 5 \quad C_4 = \frac{14}{5} \times 5 = 14 \quad C_5 = \frac{18}{6} \times 14 = 42}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)![(n+1)-n]}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}$$

Ainsi /1,5

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}}$$

Remarques !

Ce n'est pas surtout pas une formule du triangle de Pascal. Ne cherchez même pas !

Nous avons vu en cours que tous les coefficients binomiaux sont des entiers naturels, donc C_n qui est soustraction de deux entiers naturels est un entiers relatifs.

Par ailleurs comme $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, alors $C_n \geqslant 0$. /1,5

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad C_n \in \mathbb{N}.}$$

3. Triangle de Catalan. $a_{i+1,j+1} = a_{i+1,j} + a_{i,j+1}$ Puis $a_{n,n} = C_n$

(a) On trouve en ligne 0 et colonne 0, le nombre 1.
Puis, ligne après ligne sur la colonne 0, on trouve toujours un 1.
Ensuite, on remplit pour la ligne $i+1$ les colonnes les unes après les autres (j de 1 à $i+1$).
Cela donne le triangle suivant (6 premières lignes pour $i = 0$ à $i = 5$) : /2

1	(0)					
1	1	(0)				
1	2	2	(0)			
1	3	5	5	(0)		
1	4	9	14	14	(0)	
1	5	14	28	42	42	(0)

Piste de recherche...

(b) *On va faire un raisonnement par récurrence, mais on ne peut pas se baser sur i ou sur j comme indice de récurrence, car dans la formule apparait à la fois deux $i+1$ et deux $j+1$.*
En revanche le variant est le somme $i+j$. En effet : à gauche, elle vaut $i+1+j+1 = i+j+2$ et à droite, elle vaut (2 fois) $i+1+j = i+j+1$.
On prend donc comme indice $h = i+j$.

Posons pour tout $h \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}_h : \ll \text{ pour tout } i,j \in \mathbb{N} \text{ tels que } i+j=h, j \leqslant i,\ a_{i,j} = \binom{i+j}{j} - \binom{i+j}{j-1} \gg$$

— On considère $h=0$ et donc $i=j=0$.
$a_{0,0} = 0$ et $\binom{i+j}{j} - \binom{i+j}{j-1} = \binom{0}{0} - \binom{0}{-1} = 1-0=0$.
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $h \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_h$ est vraie.
Soient $i,j \in \mathbb{N}$ tels que $i+j = h+1$ et $j \leqslant i$ (on cherche à démontrer $\mathcal{P}_{h+1}$).
  — Si $j=0$ et $i=h+1$, on a vu que $a_{i,j} = 1 = 1+0 = \binom{h+1}{0} - \binom{h+1}{-1}$
  — On peut supposer $j \geqslant 1$, donc $i \geqslant 1$.
  On peut appliquer $\mathcal{P}_h$ car $i+j-1 = h$, $i-1+j=h$, $i \geqslant j-1$ et $i-1 \geqslant j$ si $i > j$

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= a_{i,j-1} + a_{i-1,j} = \binom{i+j-1}{j-1} - \binom{i+j-1}{j-2} + \binom{i+j-1}{j} - \binom{i+j-1}{j-1} \\ &= \left(\binom{i+j-1}{j-1} + \binom{i+j-1}{j} \right) - \left(\binom{i+j-1}{j-2} + \binom{i+j-1}{j-1} \right) \\ &= \binom{i+j}{j} - \binom{i+j}{j-1} \end{aligned}$$

  — Reste le cas $i=j \geqslant 1$. Dans ce cas $a_{i-1,j} = 0$. On applique $\mathcal{P}_h$

$$a_{i,j} = a_{i,j-1} + 0 = \binom{i+j-1}{j-1} - \binom{i+j-1}{j-2}$$

  Puis comme $i=j$ et $(2i-1)-(i-1) = i$, on trouve

$$a_{i,j} = \binom{2i-1}{i-1} - \binom{2i-1}{i-2} = \binom{2i-1}{i} - \binom{2i-1}{i-2}$$

  Puis on ajoute et retranche $\binom{2i-1}{i-1}$:

$$a_{i,j} = \binom{2i-1}{i} + \binom{2i-1}{i-1} - \binom{2i-1}{i-1} - \binom{2i-1}{i-2} = \binom{2i}{i} - \binom{2i}{i-1}$$

  d'après la formule du triangle de Pascal.

Tous les cas on était étudié : $\mathcal{P}_{h+1}$ est également vraie.
La récurrence est démontrée : /4

$$\boxed{\text{Pour tout } 0 \leqslant j \leqslant i,\ a_{i,j} = \binom{i+j}{j} - \binom{i+j}{j-1}}$$

On a alors

$$a_{n,n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = C_n$$

car $2n-(n-1) = n+1$ /1

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad C_n = a_{n,n}}$$

4. Relation de récurrence. On note $S_n = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$ et $T_n = \sum_{i=0}^{n} i C_i C_{n-i}$

(a)

$$\boxed{S_0 = \sum_{i=0}^{0} C_i C_{-i} = C_0 C_0 = 1}$$

/1

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on fait le changement $j = n - i$ dans la seconde somme :

$$\begin{aligned} 2T_n &= \sum_{i=0}^{n} iC_iC_{n-i} + \sum_{j=0}^{n} jC_jC_{n-j} = \sum_{i=0}^{n} iC_iC_{n-i} + \sum_{i=0}^{n}(n-i)C_{n-i}C_i \\ &= \sum_{i=0}^{n}[i + (n-i)]C_iC_{n-i} = n\sum_{i=0}^{n} C_iC_{n-i} \end{aligned}$$

Donc /2

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 2T_n = nS_n}$$

(c) Il s'agit de reprendre le résultat de la question 1.(b) /0,5

$$\boxed{\forall\, i \geqslant 1, \quad (i+1)C_i = 4(i-1)C_{i-1} + 2C_{i-1}.}$$

(d) On suppose que $S_n = C_{n+1}$.
D'après la question précédente,

$$T_{n+1} + S_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2} + 1\right) S_{n+1} = \frac{n+3}{2} S_{n+1}$$

Et par ailleurs,

$$\begin{aligned} T_{n+1} + S_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} iC_iC_{n+1-i} + \sum_{i=0}^{n+1} C_iC_{n+1-i} = \sum_{i=0}^{n+1}(i+1)C_iC_{n+1-i} \\ &= \underbrace{C_0C_{n+1}}_{i=0} + \sum_{i=1}^{n+1}[4(i-1)C_{i-1} + 2C_{i-1}]C_{n+1-i} && \text{d'après (c)} \\ &= C_{n+1} + 4\sum_{j=0}^{n} jC_jC_{n-j} + 2\sum_{j=0}^{n} C_jC_{n-j} && \text{en posant } j = i-1 \\ &= C_{n+1} + 4T_n + 2S_n = C_{n+1} + (2n+2)S_n && \text{d'après (b)} \\ &= (2n+3)C_{n+1} && \text{par hypothèse : } S_n = C_{n+1} \end{aligned}$$

Par transitivité de l'égalité :

$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = (2n+3)C_{n+1} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3} C_{n+1}$$

Alors que

$$C_{n+2} = \frac{1}{n+3}\binom{2n+4}{n+2} = \frac{1}{n+3}\,\frac{(2n+4)(2n+3)}{(n+2)(n+2)}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{n+3}2(2n+3)C_{n+1}$$

Donc /3

$$\boxed{S_{n+1} = C_{n+2}}$$

(e) On a démontré que $S_0 = C_1 (= 1)$, puis que : si pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = C_{n+1}$ alors $S_{n+1} = C_{n+2}$.
Il s'agit donc d'une récurrence et ainsi, on peut affirmer : /2

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{i=0}^{n} C_iC_{n-i} = C_{n+1}}$$

B. Trigonométrie

On rappelle et admet la formule du binôme de Newton pour une puissance a non entière :

$$\forall\, x \in]-1,1[, \qquad (1-x)^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a(a-1)\times\cdots\times(a-k+1)}{k!}(-1)^k x^k$$

Ici, on s'intéresse au cas $a = \frac{1}{2}$. On note donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $a_k = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-1)^k$.

Pour toute cette partie, on considère la fonction $c : x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

1. La fonction f est dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$, donc est dérivable en 0.
   On a pour tout $x \in]-\infty, \frac{1}{4}[$,
$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{1-4x}} = \frac{-2}{\sqrt{1-4x}}$$
   Ainsi $f'(0) = -2$.
   Et d'après le théorème rappelé, on a donc :
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-4x}-1}{x} = -2$$
   Donc c admet une limite en 0 : /2
$$\boxed{\lim_{x\to 0} c(x) = \frac{-1}{2} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-4x}-1}{x} = 1.}$$
   Par ailleurs, c est bien définie est continue sur $\mathbb{R}^*$.
$$\boxed{\text{On en déduit que } c \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ en entier.}}$$
2. Expression en fonction des nombres de Catalan
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-1)^k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-i\right)}{k!}(-1)^k \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}(1-2i)\right)}{k!}(-1)^k = \frac{\frac{1}{2^k}(-1)^k\prod_{i=0}^{k-1}(2i-1))}{k!}(-1)^k \\ &= \frac{(-1)\times\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1))}{2^k k!} = -\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1))\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{2i}{2i}\right)}{2^k k!} \\ &= -\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)(2i))\ \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!}}{2^k k!} = -\frac{(2(k-1))!}{2^{2k-1}(k-1)!k!} \end{aligned}$$
   /2,5
$$\boxed{a_k = -2\frac{(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!}}$$
   (b) Donc pour tout x tel que $4x \in]-1,1[$,
$$\sqrt{1-4x} = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 4^k x^k = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k$$
   Donc
$$c(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\times\left(2\sum_{k=1}^{+\infty} C_{k-1}x^k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_{k-1}x^{k-1}$$
   En posant $h = k-1$: /2,5
$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}[,\ c(x) = \sum_{h=0}^{+\infty} C_h x^h}$$
3. Série de Minggatu. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a)
$$c\left(\frac{\sin^2\alpha}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{1-4\frac{\sin^2\alpha}{4}}}{2\frac{\sin^2\alpha}{4}} = 2\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$$
   /2
$$\boxed{c\left(\frac{\sin^2\alpha}{4}\right) = 2\frac{1-|\cos\alpha|}{\sin^2\alpha}}$$
   (b) On calcule ensuite pour $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $|\cos\alpha| = \cos\alpha$,
$$\sin^3\alpha \times c\left(\frac{\sin^2\alpha}{4}\right) = 2\sin\alpha(1-\cos\alpha) = 2\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha - \sin(2\alpha)$$
   Donc /2
$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha - \sin^3 c\left(\frac{\sin^2\alpha}{4}\right) = 2\sin\alpha - \sum_{h=0}^{+\infty} C_h \frac{\sin^{2h+3}\alpha}{4^h}}$$
   /1
$$\boxed{\text{La formule n'est pas vraie pour tout } \alpha \text{ de } \mathbb{R}.}$$

Remarques !

Par exemple : pour $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ *et donc on a*

$$\sin(2\alpha) = \sum_{h=0}^{+\infty} C_h \frac{\sin^{2h+3}\alpha}{4^h} - 2\sin\alpha$$