MPSI 3 - Fermat Le 21.09.18
2018-2019

Devoir surveillé n°1

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice 1 - Méthode de Viète

On considère l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ dont on cherche les racines.

1. Montrer qu'en faisant un changement de variable du type $X = x - \alpha$ il est possible de transformer l'équation en celle d'une équation du type $X^3 - 3pX - 2q = 0$ $(*)$
2. Linéariser $\cos^3 \theta$
3. Faire le changement de variable $(x \to \theta)$: $X = 2\sqrt{p}\cos(\theta)$ dans l'équation $(*)$.
4. En déduire (dans le cas $p^3 > q^2$) les solutions X de $(*)$, sous la forme de cos d'un angle particulier.
5. Donner le racines de $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$.

Exercice 2 - A partir du sujet des OMI 2018

Un anti-triangle de Pascal est un tableau en forme de triangle équilatéral dans lequel sont disposés des nombres tels que, excepté pour les nombres placés sur la ligne du bas, chaque nombre soit égal à la valeur absolue de la différence entre les deux nombres situés juste en-dessous.
Par exemple, le tableau ci-dessous est un anti-triangle de Pascal de quatre lignes qui contient chaque entier entre 1 et 10

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Le but est de répondre à la question : *Existe-t-il des anti-triangle de Pascal de 2018 lignes qui contient tous les entiers de* 1 à $1 + 2 + \cdots + 2018$ *?* On fait un raisonnement par l'absurde, on suppose qu'un tel triangle notée T existe.

1. Quel est le plus grand entier N qui figurent dans un anti-triangle de k lignes avec tous les entiers consécutifs de 1 à N (chacun écrit une fois) ?
2. Calculer le plus grand entier dans l'anti-triangle de 2018 lignes.
3. On note M_n et m_n le plus grand et le plus petit nombre en ligne n de l'anti-triangle T considéré. Montrer que pour tout $n \in [\![2, 2018]\!]$, $M_n - M_{n-1} \geqslant m_n$,

   puis pour $1 \leqslant i < j \leqslant 2018$, $M_j - M_i \geqslant \displaystyle\sum_{k=i+1}^{j} m_k$.
4. En déduire que $M_{2018} = \max(T)$,

   puis que $\{m_1, m_2, \dots m_{2018}\} = \{1, 2, \dots 2018\}$ et pour $j \in [\![1, 2018]\!]$, $M_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} m_k$ (*)
5. Montrer que pour tout $n \leqslant 1954$, $M_n < \displaystyle\sum_{h=1}^{2017} h$ (*)
6. Montrer qu'il y a au plus deux nombres ℓ supérieur à $\displaystyle\sum_{h=1}^{2017} h$ sur chaque ligne n pour $n > 1954$ (**)
7. Conclure.

Problème. Nombres de Catalan

En hommage à Eugène CATALAN, nous définissons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Tout au long de ce problème, nous étions quelques propriétés de ces nombres

A. Formules de récurrence

1. Quelques valeurs
   (a) Donner les valeurs de C_0, C_1 et C_2.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \dfrac{4n+2}{n+2}C_n$.
   Donner alors les valeurs numériques de C_3, C_4, C_5.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1}$.
   En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathbb{N}$.
3. Triangle de Catalan. On construit par récurrence la suite doublement indexée $(a_{i,j})$ par

$$\forall\ i \in \mathbb{N}, a_{i,0} = 1 \qquad \forall\ j \in [\![0, i]\!], a_{i+1,j+1} = a_{i+1,j} + a_{i,j+1} \qquad (\text{avec } a_{i,i+1} = 0)$$

   (a) Représenter, dans un triangle, les nombres $(a_{i,j})$ pour i et j de 0 à 5.
   (b) Montrer que pour tout $0 \leqslant j \leqslant i$, $a_{i,j} = \binom{i+j}{j} - \binom{i+j}{j-1}$. Comment trouver C_n ?
4. Relation de récurrence. On note $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$ et $T_n = \sum\limits_{i=0}^{n} iC_i C_{n-i}$
   (a) Que vaut S_0 ?
   (b) Avec un changement d'indice dans une des sommes T_n montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $2T_n = nS_n$
   (c) Montrer que pour $i \geqslant 1$, $(i+1)C_i = 4(i-1)C_{i-1} + 2C_{i-1}$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $S_n = C_{n+1}$.
   Montrer que $T_{n+1} + S_{n+1} = \dfrac{n+3}{2}S_{n+1}$ et $T_{n+1} + S_{n+1} = (2n+3)C_{n+1}$.
   En déduire que $S_{n+1} = C_{n+2}$
   (e) Qu'avez-vous démontrer en associant les réponses aux questions (a) et (d) ?

B. Trigonométrie

On rappelle et admet la formule du binôme de Newton pour une puissance a non entière :

$$\forall\ x \in]-1, 1[, \qquad (1-x)^a = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a(a-1) \times \cdots \times (a-k+1)}{k!}(-1)^k x^k$$

On s'intéresse au cas $a = \frac{1}{2}$. On note donc, $a_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $a_k = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-1)^k$.

Pour toute cette partie, on considère la fonction $c : x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

1. On rappelle :

   f est dérivable en x_0 ssi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite en x_0. Dans ce cas, cette limite est $f'(x_0)$.

   En considérant $f : x \mapsto \sqrt{1-4x}$, montrer que c admet une limite en $x_0 = 0$ égale à 1.
   On en déduit que c est définie sur $\mathbb{R}$ en entier.
2. Expression en fonction des nombres de Catalan
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = -2\dfrac{(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!}$
   (b) En déduire que pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, $c(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$
3. Série de Minggatu. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer $c\left(\frac{\sin^2\alpha}{4}\right)$
   (b) En déduire pour $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la formule de Minggatu (Chinois, 1692-1763) :

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha - \sum_{h=0}^{+\infty} C_h \frac{\sin^{2h+3}\alpha}{4^h}$$

   Ce résultat est-il vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$?