Pour le 05.10.18

Devoir à la maison n°2

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1

On note $A(31+12i)$, $B(24+23i)$, $B'(24+12i)$, $A'(-31+12i)$ et $O(0)$.

1. Montrer A et B sont sur un même cercle de centre O.
2. Montrer que $\widehat{AOB} = 2\widehat{AA'B} = 2\widehat{B'A'B} = \arctan \frac{1}{5}$
3. En généralisant l'étude précédente, en déduire que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{4}{33} + 2\arctan\frac{1}{13} + 2\arctan\frac{1}{21} + 2\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{47}$$

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note ω le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
Une fonction polynomiale P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ est caractérisé par ses n coefficients $(a_0, a_1, \ldots a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}$$

Dans ce problème, les polynômes considérés sont tous de degré inférieur ou égal à $n-1$.

I. Calculs

1. Dans cette question, on note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Soit $q \in \mathbb{N}$
   (a) Montrer que $\mathrm{Re}((1+j)^q) = \cos\frac{q\pi}{3}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Re}((1+j)^q j) = \cos\frac{(q+2)\pi}{3}$ et $\mathrm{Re}((1+j)^q \overline{j}) = \cos\frac{(q+4)\pi}{3}$.
2. Appliquer la technique ci-dessus pour simplifier de la même manière $\mathrm{Re}((1+\omega^k)^q\overline{\omega^{rk}})$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $r, k \in \mathbb{N}$.
3. Calculer, en fonction de $p \in \mathbb{Z}$, la somme

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{pk}$$

II. Définitions et propriétés

Les transformés de Fourier des polynômes P sont les fonctions polynomiales $\mathcal{F}(P)$ et $\overline{\mathcal{F}}(P)$ définies par

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \mathcal{F}(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) z^k \\ \overline{\mathcal{F}}(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k}) z^k \end{cases}$$

1. Quelques exemples.
   (a) Notons $f : z \mapsto 1$ et $g : z \mapsto 1 + z + \cdots + z^{n-1}$.
   Expliciter $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(g)$ en fonction de f et de g.
   (b) On note Id : $z \mapsto z$. Expliciter $A = \mathcal{F}(\mathrm{Id})$, puis calculer pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(A)(z)$ et $\overline{\mathcal{F}}(A)(z)$.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, P, Q, polynômes de degré inférieur à $n-1$,

$$\mathcal{F}(\lambda P + Q) = \lambda\mathcal{F}(P) + \mathcal{F}(Q) \qquad \overline{\mathcal{F}}(\lambda P + Q) = \lambda\overline{\mathcal{F}}(P) + \overline{\mathcal{F}}(Q)$$

3. Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, une fonction polynomiale. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(P))(z) = \alpha P(z)$$
où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ est une constante indépendante de P que l'on précisera.
On admet de même que $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(P))(z) = \alpha P(z)$ avec la même constante α.

III. Division euclidienne de polynôme à coefficients entiers

Soit H une fonction polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ à coefficients entiers relatifs :
$$\exists\, q \in \mathbb{N}, \exists\, (h_0, h_1, \ldots h_{q-1}) \in \mathbb{Z}^q \mid H : z \mapsto \sum_{k=0}^{q-1} h_k z^k$$
L'objectif de cette partie est de prouver qu'il existe deux fonctions polynomiales Q et R, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, à coefficients entiers relatifs, telles que
$$\forall\, z \in \mathbb{C}, H(z) = (z^n - 1)Q(z) + R(z) \qquad \text{et } R \text{ est de degré} \leqslant n?1$$

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer, en distinguant $j \in [\![0, n-1]\!]$ et $j \geqslant n$, qu'il existe deux fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs Q_j et R_j telles que
$$\forall\, z \in \mathbb{C}, z^j = (z^n - 1)Q_j(z) + R_j(z) \qquad \text{et } R_j \text{ est de degré} \leqslant n?1$$
On pourra effectuer la division euclidienne de j par n : $j = nq + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$, écrire $z^j = z^{nq+r}?z^r + z^r$ puis chercher à factoriser $z^n - 1\ldots$
2. En déduire le résultat annoncé en début de partie. On exprimera Q et R en fonction des fonctions $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ explicitées précédemment.

IV. Sommes de coefficients binomiaux

Soient $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Pour tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, on note $D_r = \{j \in [\![0, q]\!] \mid j \equiv r[n]\}$ et on pose $a_r = \sum_{j \in D_r} \binom{q}{j}$.
On pose $H(z) = (1+z)^q$ et $A(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_{n-1} z^{n-1}$. On rappelle que $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Montrer que, pour toute racine n-ième de l'unité ξ,
$$(1+\xi)^q = A(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xi^k$$
2. (a) Justifier l'existence de deux fonctions polynomiales Q et R de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ à coefficients entiers relatifs telles que
$$R \text{ est de degré } \leqslant n-1 \qquad \text{et } \forall\, z \in \mathbb{C}, \quad (1+z)^q = (z^n - 1)Q(z) + R(z)$$
(b) En calculant, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(R - A)(\omega^k) = R(\omega^k) - A(\omega^k)$, prouver que $R = A$.
3. En utilisant la question $II.3$, montrer que
$$A = \frac{1}{n}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(R))$$
puis en déduire
$$\forall\, r \in [\![0, n-1]\!], \quad a_r = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^q \omega^{-kr}$$
4. En déduire que, pour tout $q \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant q; k \equiv 0[3]} \binom{q}{k} = \frac{2^q + 2\cos\frac{q\pi}{3}}{3}, \qquad \sum_{0 \leqslant k \leqslant q; k \equiv 1[3]} \binom{q}{k} = \frac{2^q + 2\cos\frac{(q+4)\pi}{3}}{3} \qquad \sum_{0 \leqslant k \leqslant q; k \equiv 1[3]} \binom{q}{k} = \frac{2^q + 2\cos\frac{(q+2)\pi}{3}}{3}$$
$$\forall\, r \in [\![0, n-1]\!], \sum_{0 \leqslant k \leqslant q; k \equiv r[3]} \binom{q}{k} = \frac{1}{n}\left(2^q + 2^q \sum_{k=1}^{n-1} \cos^q \frac{k\pi}{n} \cos\frac{k(q-2r)\pi}{n}\right)$$