Devoir à la maison n°1
CORRECTION

Exercice 1

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Simple calcul (mais il faut mettre au même dénominateur) :

$$\boxed{H_1 = 1,\ H_2 = \frac{3}{2},\ H_3 = \frac{11}{6},\ H_4 = \frac{25}{12},\ H_5 = \frac{137}{60}}$$

2. Comme demandé, on exprime de deux façons $\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{k-j}$:

$$\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{k-j} = \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{k-j} = \sum_{k=2}^{n} \sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{h}$$

où l'on a fait le changement de variable strictement décroissant $h = k - j$ dans la somme intérieure ($j = 1 \Leftrightarrow h = k-1$, $j = k-1 \Leftrightarrow h = 1$). Ainsi, on a la première égalité :

$$\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{k-j} = \sum_{k=2}^{n} H_{k-1} = \sum_{r=1}^{n-1} H_r$$

Remarques !

Deux remarques :

— *Ici le changement de variable se fait entre j et h (puisque k est défini à l'extérieur de cette somme. Il faut donc considère k comme une constante !!*

— *On aurait également pu faire : $\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{k-j} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{k-j}$ et le même changement de variable. Cela aurait donné le même résultat. A faire. . .*

Maintenant, nous allons calculer cette même somme d'une seconde façon, :

$$\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{k-j} = \sum_{k=2}^{n} \sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{h} = \sum_{1 \leqslant h < k \leqslant n} \frac{1}{h}$$

Et on intervertit les sommes :

$$\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{k-j} = \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=h+1}^{n} \frac{1}{h} = \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h} \sum_{k=h+1}^{n} 1 = \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h}(n-(h+1)+1)$$

car il y a $b - a + 1$ entiers compris entre les entiers a et b. Donc

$$\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{k-j} = \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h}(n-h) = n \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h} - \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h}(n-h)1 = nH_{n-1} - (n-1) = nH_{n-1} - n + 1$$

Comme $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$ alors $nH_{n-1} = n(H_n - \frac{1}{n}) = nH_n - 1$.
On a donc

$$\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{k-j} = nH_n - n$$

Puis par transitivité de l'égalité :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n}$$

Piste de recherche...

On peut évidemment faire une récurrence. Ou une version plus efficace :

On note $r_n = \sum_{k=1}^{n-1} H_k - nH_n + n$.

On a $r_2 = H_1 - 2H_2 + 2 = 1 - 2(1+\frac{1}{2}) + 2 = 0$. *Et pour tout* $n \geqslant 2$ *:*

$$r_{n+1} - r_n = H_n - (n+1)H_{n+1} + (n+1) + nH_n - n = (n+1)(H_n - H_{n+1}) + 1 = 0$$

Donc (r_n) *est constante et pour tout* $n \geqslant 2$, $r_n = r_2 = 0$.

Ainsi : $\sum_{k=1}^{n-1} H_k - nH_n + n = 0$ *i.e.* $\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$

Exercice 2

On note $M = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$

$$\binom{\binom{k}{2}}{2} = \frac{M(M-1)}{2} = \frac{\frac{k(k-1)}{2} \times \left(\frac{k(k-1)}{2} - 1\right)}{2} = \frac{k(k-1)[(k(k-1)-2]}{8}$$

Or $k(k-1) - 2 = k^2 - k - 2 = (k+1)(k-2)$, donc

$$\binom{\binom{k}{2}}{2} = \frac{k(k-1)(k+1)(k-2)}{8} = \frac{(k+1)!}{4 \times 2 \times (k-3)!} = 3 \times \frac{(k+1)!}{4!(k-3)!} = 3\binom{k+1}{4}$$

Remarques !

Comment factoriser $k^2 - k - 2$ *?*

1. *On trouve une racine évidente.*
   Il faut essayer des petites valeurs k_0 *et on voit si* $k_0^2 - k_0 - 2 = 0$.
2. *Avec* $k_0 = -1$, *on trouve bien* 0.
3. *On factorise alors par* $(k - k_0) = (k - (-1)) = k + 1$.
4. *Puis on effectue la division euclidienne*

On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\binom{k}{2}}{2}\binom{2n-k}{n} = 3\sum_{k=0}^{n}\binom{k+1}{4}\binom{2n-k}{n} = 3\sum_{h=1}^{n+1}\binom{h}{4}\binom{2n+1-h}{n}$$

Donc, d'après la formule donnée en cours :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{\binom{k}{2}}{2}\binom{2n-k}{n} = 3\binom{2n+2}{n+5}}$$

Pour la seconde somme, on coupe l'opération en deux, selon que le minimum est k ($k \leqslant \frac{n}{2}$) ou $n-k$ minimum.

On va procéder en deux temps selon que n est pair ou impair.

— On suppose que $n = 2p$ est pair

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\min(k,n-k) &= \sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}\min(k,n-k) + \binom{n}{p}\min(p,n-p) + \sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}\min(k,n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}k + p\binom{n}{p} + \sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}(n-k)\end{aligned}$$

en effet, si $k \geqslant p+1 = \frac{n}{2}+1$, alors $n-k \leqslant n - \frac{n}{2} - 1 = \frac{n}{2} - 1$;
ainsi dans ce dernier cas, $\min(k, n-k) = n-k$.

Puis, comme, pour $k > 0$:

$$\binom{n}{k}k = \frac{n!}{k!(n-k)!}k = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$
$$\binom{n}{p}p = n\binom{n-1}{p-1}$$
$$\binom{n}{k}(n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k) = n\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = n\binom{n-1}{k}$$

Enfin, dans la première somme, pour $k=0$, on trouve un terme nulle. De même dans la seconde pour $k=n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\min(k,n-k) &= n\left(\sum_{k=1}^{p-1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{p-1}+\sum_{k=p+1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\right)\\
&= n\left(\sum_{h=0}^{p-2}\binom{n-1}{h}+\binom{n-1}{p-1}+\sum_{k=p+1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\right)
\end{aligned}$$

On y trouve tous les termes de $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$ excepté le cas $k=p$.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\min(k,n-k) = n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}-\binom{n-1}{p}\right) = n\left(2^{n-1}-\binom{n-1}{p}\right)$$

— On suppose que $n=2p+1$ est impair. Avec le même type de calcul, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\min(k,n-k) &= \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}k+\sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}(n-k) = n\left(\sum_{k=1}^{p}\binom{n-1}{k-1}+\sum_{k=p+1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\right)\\
&= n\left(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=p+1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\right)\\
&= n\left(2^{n-1}-\binom{n-1}{p}\right)
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $h=n-k$ dans la seconde somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\min(k,n-k) = 2\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}k+\binom{n}{2p+1}(2p+1)$$

Enfin, toujours avec les mêmes idées :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\min(k,n-k) = 2n\sum_{k=0}^{p}\binom{n-1}{k-1}+n\binom{n-1}{2p} = n2\times\frac{1}{2}2^{n-1}$$

Dans tous les cas :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\min(k,n-k) = n2^{n-1}-n\binom{n-1}{\lfloor p/2\rfloor}}$$

Exercice 3

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $z=\exp(i\pi/n)$.

1. Il s'agit d'une somme géométrique (vue en cours), comme $z\neq 1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}z^k = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-(-1)}{1-z} = \frac{2}{1-z}}$$

car $z^n=\exp(ni\pi/n)=\exp(i\pi)=-1$.

2. C'est classique, on exploite l'angle moitié :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1-z} &= \frac{2}{e^{i0}-e^{i\pi/n}} = \frac{1}{e^{i\pi/2n}}\times\frac{2}{e^{-i\pi/2n}-e^{i\pi/2n}} = e^{-i\pi/2n}\times\frac{2}{-2i\sin(\pi/2n)}\\
&= \big(\cos(-\pi/2n)+i\sin(-\pi/2n)\big)\times\frac{i}{\sin(\pi/2n)} = \frac{i\cos(\pi/2n)}{\sin(\pi/2n)}-(i)^2 = \frac{i}{\tan(\pi/2n)}+1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{2}{1-z} = 1+i\frac{1}{\tan(\pi/2n)}}$$

3. Il suffit de prendre la partie imaginaire :
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, comme $\sin\frac{n\pi}{n}=\sin\pi=0$, :

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0+\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Im}(e^{ik\pi/n}) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\pi/n}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}z^k\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{2}{1-z}\right)$$

par linéarité de Im. Puis d'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \operatorname{Im}\left(1 + i\frac{1}{\tan(\pi/2n)}\right)$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan(\pi/2n)}}$$

Piste de recherche...

On trouve donc également un résultat intéressant en prenant la partie réelle. Lequel ?

Exercice 4

1. On considère le polynôme dont u et v sont les uniques racines :

$$(x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Or ce polynôme a pour discriminant : $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = -\frac{5}{4}$ et racines : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

$$\boxed{\{u, v\} = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{4}; \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\}}$$

A noter qu'on ne peut pas différencier u et v.

2. On pose $\omega = e^{2i\pi/5}$. Comme à l'exercice précédent ($\omega \neq 0$),

$$\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \sum_{k=0}^{4} \omega^4 = \frac{1-\omega^5}{1-\omega}$$

Or $\omega^5 = e^{2i\pi} = 1$, et donc $1 - \omega^5 = 0$.

$$\boxed{\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0}$$

En prenant la partie réelle de cette égalité :

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(6\pi/5) + \cos(8\pi/5) \\ &= 1 + \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(-4\pi/5) + \cos(-2\pi/5) \\ &= 1 + 2\big(\cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5)\big) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}}$$

3. On reconnait les formules de trigonométrie vue en cours

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\left(\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\frac{4\pi}{5} &= \cos\frac{-4\pi}{5} = \cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) \\ &= \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5} \end{aligned}}$$

4. On fait la demi-somme des résultats de la question précédente :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} &= \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{4\pi}{5}\cos\tfrac{2\pi}{5} + \sin\tfrac{4\pi}{5}\sin\tfrac{2\pi}{5} + \cos\tfrac{4\pi}{5}\cos\tfrac{2\pi}{5} - \sin\tfrac{4\pi}{5}\sin\tfrac{2\pi}{5}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1}{4} \end{aligned}}$$

d'après la question 2.

5. Ainsi, on a $\{u, v\} = \{\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}\}$ puisqu'ils sont solutions du même système. Il rest à différencier ces nombres. Avec le cercle trigonométrique, on voit que $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ et $\cos\frac{4\pi}{5} < 0$ On peut donc identifier :

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \ \text{ et } \ \cos\frac{4\pi}{5} = x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}}$$