Devoir à la maison n°4

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Exercice - Groupe distingué

On considère $(G, \star)$ un groupe et $(H, \star)$ un sous-groupe de $(G, \star)$.
On note $\mathcal{R}_H$, la relation définie sur G par :

$$x \,\mathcal{R}_H\, y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \star y^{-1} \in H$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence.

On note $\overline{x}$, la classe de x pour cette relation d'équivalence. Autrement écrit : $\overline{x} = \{a \in G \mid a \star x^{-1} \in H\}$.
On note également $\dfrac{G}{H}$, l'ensemble des classes d'équivalence.
On aimerait pouvoir affirmer que $(\dfrac{G}{H}, \overline{\star})$ est un groupe, avec

$$\overline{x} \,\overline{\star}\, \overline{y} = \overline{x \star y}$$

Pour cela il faudrait prouver que le changement de représentant de classe $\overline{x}$ et $\overline{y}$ soit sans conséquence :

$$\big(x \,\mathcal{R}_H\, x' \text{ et } y \,\mathcal{R}\, y'\big) \qquad \Longrightarrow \qquad (x \star y) \,\mathcal{R}_H\, (x' \star y') \qquad (1)$$

2. Montrer que si (1) est vérifiée pour tout $x, y, x', y' \in G$,
   alors H vérifie : $\forall\, x \in G, \forall\, h \in H,\; x \star h \star x^{-1} \in H$.
   On dit, dans ce cas que $(H, \star)$ est un <u>sous-groupe distingué</u> de $(G, \star)$
3. Montrer que la réciproque est vraie : si H distingué alors (1).
4. Montrer alors que $(\dfrac{G}{H}, \overline{\star})$ est un groupe.

On a démontrer que l'ensemble quotient $\dfrac{G}{H}$ est un groupe si et seulement si H est distingué

5. Soit $f : (G, \star) \to (G', T)$, un morphisme de groupe.
   Montrer que $\text{Ker } f = f^{-1}(e_{G'}) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$ est un sous-groupe distingué de G.

Problème - Suite logistique

Dans le devoir précédent, on n'avait étudier le modèle de Verhulst continue :
Trouver f solution de l'équation différentielle : $y'(t) = r\left(1 - \dfrac{y(t)}{K}\right) y(t)$.
Dans ce problème nous nous intéressons à la version discrète du problème (I.), puis nous étudions la suite associée selon la valeur d'un paramètre a, comparable à r.

Dans tout le problème, on considère, pour tout nombre réel $a \in [0, 4]$, une suite $({}^a x_n)$ vérifiant :

$${}^a x_0 \in [0,1] \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, {}^a x_{n+1} = a({}^a x_n)(1 - {}^a x_n)$$

On note également $f_a : x \mapsto ax(1 - x)$ et si nécessaire $\varphi_a : x \mapsto f_a(x) - x$.

I. Discrétisation du modèle de Verhulst

Dans cette partie (uniquement), on considère $h > 0$, appelé *pas* du problème et on note $u_n = f(nh)$.
Si h st petit : $u_{n+1} - u_n = f((n+1)h - f(nh) \approx h \times f'(nh)$.
On suppose donc que f est solution de l'équation différentielle : $y'(t) = r\left(1 - \dfrac{y(t)}{K}\right) y(t)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (rh + 1)u_n - \dfrac{rh}{K} u_n^2$
2. On note $v_n = \dfrac{rh}{K(rh+1)} u_n$. Montrer que (v_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = a v_n (1 - v_n)$$

où a est un paramètre à exprimer en fonction de r, h.

3. On suppose que $a \in [0,4]$.
   Donner les racines du polynôme f_a et montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f_a. On en déduit que la suite (v_n) est parfaitement définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0,1]$.

II. Etude de la suite logistique. Cas simple : $a < 3$

Dans cette partie, on considère $a \in [0,3]$

1. Résoudre l'inéquation $\varphi_a(x) \geqslant 0$.
   Quelles sont les limites potentielles de $({}^a x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose ici que $a \in [0,1]$.
   Etudier les variations de $({}^a x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et donner sa limite
3. On suppose ici que $a \in [1,2]$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ${}^a x_n \in [0, \frac{1}{2}]$.
   En faisant une disjonction de cas selon le signe de ${}^a x_1 - \frac{a-1}{a}$, montrer que $({}^a x_n) \to \frac{a-1}{a}$.
4. On admet que pour $a \in [2,3]$, la suite $({}^a x_n)$ converge vers $\frac{a-1}{a}$.
   Faire une représentation graphique de cette situation.

> Soit ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$,
> on dit que ℓ est attractif si $|f'(\ell)| < 1$
> on dit que ℓ est répulsif si $|f'(\ell)| > 1$
> On admet que si $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie : $(u_n) \to \ell$, alors ℓ est un point fixe attractif.

5. A quelle condition, 0 est un point fixe attractif ? A quelle condition, $\frac{a-1}{a}$ est un point fixe attractif ?
6. Vérifier les cas précédents (attraction, répulsion).

III. Etude de la suite logistique. Cas plus compliqué : $a \in]3,4[$

Dans cette partie, on considère que $a \in]3,4[$

1. Montrer que les deux points fixes de f_a sont répulsifs.
2. On considère les deux suites extraites : $({}^a x_{2n+1})$ et $({}^a x_{2n+2})$.
   Donner les deux relations de récurrence vérifiées par ces deux suites (on pourra exploiter $f_a \circ f_a$).
3. Montrer que les points fixes de $f_a \circ f_a$ sont
   $$0, \qquad \frac{a-1}{a}, \qquad \mu_1 = \frac{a+1-\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}, \qquad \mu_2 \frac{a+1+\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$
4. Etudier l'attractivité de ces points fixes de $f_a \circ f_a$.
   Montrer en particulier que μ_1 et μ_2 sont attractifs si $a < 1 + \sqrt{6}$
5. Selon vous, que peut-on prévoir comme comportement des suites extraites $({}^a x_{2n+1})$ et $({}^a x_{2n+2})$ pour $a < 1 + \sqrt{6}$?

Malheureusement, on ne prolonge pas ici l'étude au cas $a > 1 + \sqrt{6}$...

IV. Etude de la suite logistique. Cas un peu moins simple : $a = 4$

Ici $a = 4$ et on considère un élément ${}^4 x_0 \in [0,1[$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [0,1]$ tel que ${}^4 x_0 = \sin^2(\frac{\pi}{2}\theta)$.
2. Montrer alors, par récurrence, que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad {}^4 x_n = \sin^2(2^{n-1}\pi\theta)$$

On note, pour tout entier n, $\theta_n = 2^{n-1}\pi\theta - \lfloor 2^{n-1}\pi\theta \rfloor$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n \equiv 2^{n-1}\theta[1]$.
4. En déduire que :
   — si $\theta = \dfrac{p}{2^k q}$ est rationnel (avec q impair et $p \wedge 2^k q = 1$),
   $({}^4 x_n)$ est une suite périodique à partir du rang k et de période $q-1$,
   On pourra utiliser le petit théorème de Fermat : $2^{q-1} \equiv 1[q]$
   — si θ n'est pas rationnel, (θ_n) est dense dans $[0,1]$