Le 10.11.18

Devoir surveillé n°3
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrement) selon la qualité des copies.
Nous soulignons dans la correction, les arguments à écrire absolument !

Exercice - Théorème de Bernstein-Cantor

A. Cas d'ensembles finis

1. Cardinal

(a) On vérifie les trois qualités d'une relation d'équivalence :
— Pour tout ensemble E, l'application $\varphi : E \to E, x \mapsto x$ est bijective de E sur E.
Donc pour tout E, $\quad E\,\mathcal{R}\,E$ i.e. $\mathcal{R}$ est reflexive.
— Soient deux ensembles E et F tels que $E\,\mathcal{R}\,F$.
Alors il existe $\varphi : E \to F$ bijective de E sur F.
Elle admet une réciproque $\varphi^{-1} : F \to E$ bijective.
Donc pour tout E, F, $\quad E\,\mathcal{R}\,F \Rightarrow F\,\mathcal{R}\,E$ i.e. $\mathcal{R}$ est symétrique.
— Soient trois ensembles E, F et G tels que $E\,\mathcal{R}\,F$ et $F\,\mathcal{R}\,G$.
Alors il existe $\varphi_1 : E \to F$ et $\varphi_2 : F \to G$ bijectives.
$\phi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ est une bijection de E sur G.
Donc pour tout E, F, G, $\quad E\,\mathcal{R}\,F$ et $F\,\mathcal{R}\,G \Rightarrow E\,\mathcal{R}\,G$ i.e. $\mathcal{R}$ est transitive. /2

$$\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence.}}$$

(b) On démontre le résultat contraposé.
Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{N}_n\,\mathcal{R}\,\mathbb{N}_p$.
Alors il existe $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$, bijective donc injective.
Et d'après le résultat admis : $n \leqslant p$.
Et par symétrie de la relation $\mathcal{R}$, on a de même : $p \leqslant n$.
Ainsi $n = p$. Donc par contraposée : /1,5

$$n < p \Longrightarrow n \neq p \Longrightarrow \text{NON } [\mathbb{N}_n\,\mathcal{R}\,\mathbb{N}_p]$$

$$\boxed{\text{si } n, p \in \mathbb{N} \text{ et } n < p, \text{ alors on n'a pas } \mathbb{N}_n\,\mathcal{R}\,\mathbb{N}_p.}$$

On dit qu'<u>un ensemble E est fini de cardinal $n(\in \mathbb{N})$</u>, si $E\,\mathcal{R}\,\mathbb{N}_n$. On note $\text{Card}(E) = n$
On dit qu'<u>un ensemble E est fini</u>, si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est fini de cardinal n.

(c) Soient E et F deux ensembles finis. On suppose $n = \text{Card}(E)$ et $m = \text{Card}(F)$.
On a donc $E\,\mathcal{R}\,\mathbb{N}_n$ et $F\,\mathcal{R}\,\mathbb{N}_m$.
Par transitivité de $\mathcal{R}$:

$$E\,\mathcal{R}\,F \Longleftrightarrow \mathbb{N}_n\,\mathcal{R}\,\mathbb{N}_m \Longleftrightarrow n = m \Longleftrightarrow \text{Card}(E) = \text{Card}(F)$$

d'après la question précédente. Donc : /1,5

$$\boxed{E\,\mathcal{R}\,F \Longleftrightarrow \text{Card}(E) = \text{Card}(F)}$$

2. Soient E, un ensemble fini de cardinal n et F, un ensemble fini de cardinal m.
On suppose que $f : E \to F$ est une application injective.

(a) $E\,\mathcal{R}\,\mathbb{N}_n$. Et on note $\hat{f} : E \to f(E), x \mapsto f(x)$.
Par définition de $f(E)$: pour tout $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = \hat{f}(x)$.
Donc $\hat{f}$ est surjective de E sur $f(E)$.
Et si $\hat{f}(x) = \hat{f}(x')$, alors $f(x) = f(x')$ et donc $x = x'$, car f injective.
Donc $\hat{f}$ est injective.
Par conséquent $\hat{f}$ est bijective de E sur $f(E)$ et donc $E\,\mathcal{R}\,f(E)$.
Par transitivité, $f(E)\,\mathcal{R}\,\mathbb{N}_n$ /3

$$\boxed{f(E) \text{ est un ensemble fini de cardinal } n.}$$

(b) On note $\varphi : E \to \mathbb{N}_n$, bijective (elle existe bien car $E \mathcal{R} \mathbb{N}_n$).

Alors φ^{-1} est injective. Il en est de même de $f \circ \varphi^{-1}$ (f est injective).

Puis on note $\psi : F \to \mathbb{N}_m$ bijective (elle existe bien car $F \mathcal{R} \mathbb{N}_m$).

ψ est injective et par composition :

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$$

est également injective.

On a alors, d'après le résultat admis : /2

$$\boxed{n \leqslant m.}$$

3. Soient E et F deux ensembles finis.
   On suppose qu'il existe $i : E \to F$ injective. Donc d'après 2., $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
   On suppose qu'il existe $j : F \to E$ injective. Donc d'après 2., $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
   Donc, par double inégalité : $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.
   D'après la question 1.(c), cela signifie que $E \mathcal{R} F$. Et par définition, cela signifie qu'il existe une bijection de E sur F. /1

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On a donc le théorème de Cantor-Bernstein :}\\ \exists\, i : E \to F, j : F \to E \text{ injectives} \Longrightarrow \exists\, b : E \to F \text{ bijective}\end{array}}$$

Remarques !

On admis ici que s'il existe une injection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_p$, alors $n \leqslant p$.
On peut le démontrer par récurrence sur n.
Posons, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n$: « $\forall\, p \geqslant 1$, ($\exists\, \varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ injective)$\Rightarrow n \leqslant p$ ».

— *Le cas $n = 1$ est simple, car nécessairement $p \geqslant 1$.*
  Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
— *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.*
  Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $\varphi : \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{N}_p$ injective.
  On note $r = \varphi(n+1) \in \mathbb{N}_p$.
  On considère $\psi : \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_p$, $k \mapsto \begin{cases} p & \text{si } k = r \\ r & \text{si } k = p \\ k & \text{sinon} \end{cases}$.
  En fait, ψ intervertit p et r. ψ est une bijection de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_p$.
  Donc, par composition, $\psi \circ \varphi : \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{N}_p$, injective et $(\psi \circ \varphi)(n+1) = \psi(r) = p$.
  Notons $\Psi = (\psi \circ \varphi)_{|\mathbb{N}_n}$, alors Ψ est également une injection.
  Et $\Psi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_{p+1}$.
  On peut appliquer $\mathcal{P}_n$ avec Ψ. Et donc $n \leqslant p - 1$.
  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

B. Cas d'ensembles quelconques

1. On a les équivalences suivantes, pour $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in C &\iff x \notin B \\ &\iff \mathrm{NON}\big(\exists\, n \in \mathbb{N} \mid x \in A_n\big) \\ &\iff \forall\, n \in \mathbb{N}, x \notin A_n \end{aligned}$$

/1

$$\boxed{x \in C \iff \forall\, n \in \mathbb{N}, x \notin A_n}$$

2. Construction de l'application.

(a) Soit $x \in C$.

Alors $x \notin A_0 = E \backslash j(E)$, donc $x \in j(E)$.

Ainsi, il existe $z \in E$ tel que $x = j(z)$ (par définition de $j(E)$). Ce qui assure l'existence.

Comme j est injective, on ne peut avoir $z \neq z'$ et $j(z) = x = j(z')$. Ce qui assure l'unicité. /2

$$\boxed{\forall\, x \in C, \exists\, !z \in F \text{ tel que } x = j(z)}$$

On notera cet élément $\Phi(x)$.

(b) Pour $x \in B$, on note $\Phi(x) = i(x)$.

— Tout élément x de B a une seule image par Φ : $i(x)$.
— Tout élément x de C a une seule image par Φ : z tel que $j(z) = x$.
— $E = B \cup C$, réunion disjointe : $B \cap C = \emptyset$. /1

$$\boxed{\text{On a ainsi bien défini l'application } \Phi : E \to F.}$$

3. Injectivité de Φ.
   (a) $\Phi_{|B} = i_{|B}$. Et i est injective, donc il en est de même de $i_{|B}$ et de $\Phi_{|B}$. /0,5
   Soit $x, x' \in C$ tel que $\Phi(x) = \Phi(x')$, donc $x = j(\Phi(x)) = j(\Phi(x')) = x'$.
   Ainsi $\Phi_{|C}$ est également injectives. /1

   $$\boxed{\text{Les restrictions de } \Phi \text{ à } B \text{ et à } C \text{ sont injectives.}}$$

   (b) Considérons maintenant $x \in C$ et $y \in B$ tels que $\Phi(x) = \Phi(y)$.
   Alors comme $x \in C$, $x = j(\Phi(x))$ et comme $y \in B$, $\Phi(y) = i(y)$, /1,5

   $$\boxed{x = j(\Phi(x)) = j(\Phi(y)) = j(i(y)) = (j \circ i)(y)}$$

   (c) Avec les mêmes notations que la question précédente.
   On a $y \in B$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y \in A_{n_0}$.
   Donc $x = (j \circ i)(y) \in (j \circ i)(A_{n_0}) = A_{n_0+1}$.
   Et donc nécessairement $x \notin B$.
   Il est donc impossible que $\Phi(x) = \Phi(y)$, si $x \in C$ et $y \in B$. /2
   Par conséquent, si $\Phi(x) = \Phi(y)$, nécessairement, x et y sont dans B ou x et y sont dans C.
   Or $\Phi_{|B}$ est injective et $\Phi_{|C}$ est injective,
   donc dans tous les cas $x = y$. /1

   $$\boxed{\Phi \text{ est injective.}}$$

4. Surjectivité de Φ.
   Soit $y \in F$ et $x = j(y)$.
   — Si $x \in C$, alors comme $x = j(y)$, par construction de Φ sur C : $\Phi(x) = \Phi(j(y)) = y$. /0,5
   — Si $x \notin C$, c'est-à-dire $x \in B$,
   alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{n_0}$.
   Notons que $x = j(y) \in j(F)$, donc $x \notin A_0$. Donc $n_0 > 0$.
   Alors il existe $z \in A_{n_0-1}$ tel que $x = (j \circ i)(z)$.
   Et donc $x = j(y) = j(i(z))$. Or j est surjective, donc $y = i(z)$.
   Or $z \in A_{n_0-1}$, donc $z \in B$ et ainsi $\Phi(z) = i(z) = y$. /1,5
   Ainsi, pour tout $y \in F$, il existe un antécédent à y par Φ (soit dans C, soit dans B).

   $$\boxed{\Phi \text{ est surjective.}}$$

5. Etude d'un exemple. On considère
   $E = \mathbb{N}$, $F = \{2, 3, \dots, \} = \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$, puis $i : E \to F$, $n \mapsto n + 4$ et $j : F \to E$, $n \mapsto n$.
   (a) Soient $n, n' \in E$,
   $$i(n) = i(n') \Longrightarrow n + 4 = n' + 4 \Longrightarrow n = n'$$
   Donc i est injective. Et on vérifie que pour tout entier n, $n + 4 \in F$.
   Soient $n, n' \in F$,
   $$j(n) = j(n') \Longrightarrow n = n'$$
   Donc j est injective. Et on vérifie que pour tout entier $n \geqslant 2$ (i.e. $n \in F$), $n \in \mathbb{N} = E$ /1

   $$\boxed{i \text{ et } j \text{ sont bien injectives de } E \text{ sur } F \text{ et } F \text{ sur } E\text{, respectivement.}}$$

   (b) $j(F) = [\![4, +\infty[\![$ et donc $A_0 = \{0, 1\}$.
   (Au brouillon : $i(A_0) = \{4, 5\}$ et $A_1 = (j \circ i)(A_0) = \{4; 5\} \dots$)
   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $A_n = \{4n; 4n + 1\}$ ».
   — $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ vraie.
   Donc $A_n = \{4n; 4n+1\}$, et donc $i(A_n) = \{4n+4; 4n+1+4\} = \{4(n+1); 4(n+1)+1\}$.
   Et ensuite $A_{n+1} = j(i(A_n)) = \{4(n+1); 4(n+1)+1\}$.
   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
   Et ainsi /2

   $$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n = \{4n; 4(n+1)\}, \qquad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \equiv 0 \text{ ou } 1[4]\}, C = \{k \in \mathbb{N} \mid k \equiv 2 \text{ ou } 3[4]\}}$$

   (c) Si $x \in B$, $\Phi(x) = i(x) = x + 4$ et si $x \in C$, comme $j(x) = x$, alors $\Phi(x) = x$. Bilan /1

   $$\boxed{\Phi : E \longrightarrow F, x \longmapsto \begin{cases} x+4 & \text{si } x \equiv 0 \text{ ou } 1[4] \\ x & \text{si } x \equiv 2 \text{ ou } 3[4] \end{cases}}$$

   (Par construction, mais on peut aussi vérifier simplement :
   Φ est bien bijective à valeur de E dans F)

Problème - Autour de la « gaussienne »

A. Intégrales de Wallis

1. L'application $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ est bijective de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de classe $\mathcal{C}^1$.
   On peut réaliser le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, on a donc /1

$$W_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(\frac{\pi}{2} - u)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u)\mathrm{d}u$$

$$\boxed{W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\mathrm{d}t}$$

2. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$ Soit $n \in \mathbb{N}$. En multipliant par $\cos^n(t) > 0$:

$$0 \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)$$

   Puis, en intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, par croissance :

$$0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$$

/1,5

$$\boxed{\text{la suite } (W_n) \text{ est décroissante.}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Les applications $u : t \mapsto \sin t$ et $v : t \mapsto \cos^{n+1} t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.
   On peut faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)(n+1)(-\sin(t))\cos^n(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 - 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^n(t)\mathrm{d}t \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

/2,5

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après le calcul précédent

$$(n+1)W_{n+1}W_n = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = ((n+1)+1)W_{(n+1)+1}W_{(n+1)}$$

   Donc la suite $\big((n+1)W_{n+1}W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
   Elle vaut sa valeur en $n = 0$:

$$1 \times W_1 \times W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\mathrm{d}t \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \times [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

/1,5

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   La suite (W_n) est décroissante, donc $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n}$.
   En multipliant par $W_{2n+1} > 0$
   (on a vu en 2, $W_n \geqslant 0$ et nécessairement $W_n \neq 0$, sinon $(n+1)W_{n+1}W_n = 0$)

$$W_{2n+1}W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1}^2 \leqslant W_{2n+1}W_{2n}$$

   Enfin, d'après 3. : $W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_n$, /1,5

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n+1}W_{2n} \leqslant W_{2n+1}^2 \leqslant W_{2n+1}W_{2n}}$$

6. On exploite alors la relation vue en 4.

$$\frac{2n+1}{2n+2}\frac{n\pi}{2(2n+1)} \leqslant nW_{2n+1}^2 \leqslant \frac{n\pi}{2(2n+1)}$$

   Ensuite, $\lim\limits_n \frac{n\pi}{2(2n+1)} = \lim\limits_n \frac{\pi}{4+\frac{2}{n}} = \frac{\pi}{4}$. Et $\lim\limits_n \frac{2n+1}{2n+2}\frac{n\pi}{2(2n+1)} = \lim\limits_n \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\frac{\pi}{4+\frac{2}{n}} = \frac{\pi}{4}$.
   Ainsi, avec le théorème de convergence par encadrement, /2

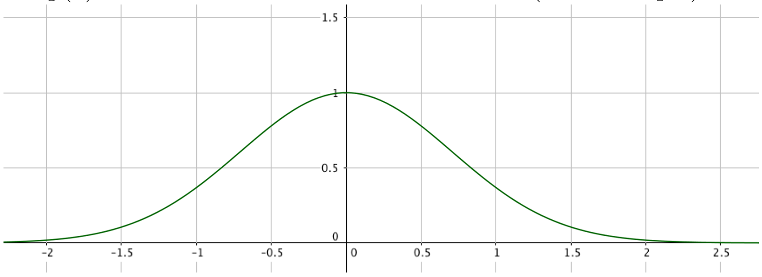
$$\boxed{\left(nW_{2n+1}^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{\pi}{4}}$$

B. Etude d'une primitive de g

1. g est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$.
   Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -2xe^{-x^2}$.
   On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   car $g(0) = 1$ et les limites en $\pm\infty$ sont nulles (calcul simple).



/2

2. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives.
   Elles sont toutes définies à une constante additive près. /0,5

$$\boxed{\text{Une seule de ces primitives s'annule en 0.}}$$

On note G, cette application. Ainsi, $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

3. On note d'abord que G est définie sur $\mathbb{R}$, symétrique en 0.
   On fait le changement de variable $u = -t$. ($\varphi : t \mapsto -t$ est $\mathcal{C}^1$-bijective).

$$G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{-x} g(-u)(-\mathrm{d}u) = -\int_0^{-x} g(u)\mathrm{d}u = -G(x)$$

   ici, on a exploité $g(-u) = \exp(-(-u)^2) = g(u)$, car g est paire. /1

$$\boxed{G \text{ est une fonction impaire.}}$$

4. Comme G est impaire, il suffit de montrer qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (ce qui est demandé).
   Pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant -t^2 \leqslant -t$,
   donc pour tout $x \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \int_1^x e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_1^x = e - e^{-x} \leqslant e$$

   Par conséquent, pour $x \geqslant 1$:

$$G(x) = \int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_1^x e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t + e$$

   Donc G est majorée sur $[1, +\infty[$ /2
   Puis G est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $G' = g \geqslant 0$, d'après le tableau de variations de g,
   Donc G est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $G(0) \leqslant G(x) \leqslant \max\big(G(x), G(1)\big) \leqslant G(1) + e$ /1,5

$$\boxed{G \text{ est une application croissante et bornée sur } \mathbb{R}_+.}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   Soit $y < 0$ (on fera $y \to -\infty$). Par relation de Chasles :

$$\int_y^x g(t)\mathrm{d}t = \int_y^0 g(t)\mathrm{d}t + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = -\int_0^y g(t)\mathrm{d}t + G(x) = -G(y) + G(x)$$

   Mais G est impaire, donc $G(y) = -G(-y)$.

$$\int_y^x g(t)\mathrm{d}t = G(x) + G(-y)$$

   Enfin, en faisant tendre $y \to -\infty$, par composition des limites ($Y = -y$), on trouve :

$$\lim_{y \to -\infty} G(-y) = \lim_{Y \to +\infty} G(Y) = \ell$$

/2

$$\boxed{\text{Donc pour tout réel } x, \int_{-\infty}^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = G(x) + \ell}$$

C. Calcul de ℓ

On rappelle que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $1 + x \leqslant e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

1. On considère $t \in [0, \sqrt{n}]$ et on note $x = -\frac{t^2}{n} \in [-1, 0]$.
   On a donc
$$0 \leqslant 1 - \frac{t^2}{n} \leqslant e^{-\frac{t^2}{n}}$$
   Puis on compose par $u \mapsto u^n$, croissante sur $\mathbb{R}_+$:
$$0 \leqslant \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \left(e^{-\frac{t^2}{n}}\right)^n = e^{-t^2}$$
/1
$$\boxed{\text{Pour tout } t \in [0, \sqrt{n}],\ \left(1 - \tfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}.}$$
   Par croissance de l'intégration entre 0 et $\sqrt{n}$:
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} g(t)\mathrm{d}t = G(\sqrt{n}) \leqslant \lim_{x \to +\infty} G(x) = \ell$$
   car G est croissante. /1,5
$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \ell}$$

2. On considère $t \geqslant 0$ et on note $x = -\frac{t^2}{n} \leqslant 0$.
   On a donc
$$0 \leqslant e^{-\frac{t^2}{n}} \leqslant \frac{1}{1 + \frac{t^2}{n}} = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-1}$$
   Puis on compose par $u \mapsto u^n$, croissante sur $\mathbb{R}_+$:
$$0 \leqslant \left(e^{-\frac{t^2}{n}}\right)^n = e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$
/1,5
$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \tfrac{t^2}{n}\right)^{-n}.}$$
   Par croissance de l'intégration entre 0 et $x > 0$:
$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = G(x) \leqslant \int_0^x \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$$
   On passe ensuite à la limite : /1,5
$$\boxed{\ell \leqslant \lim_{X \to +\infty} \int_0^X \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t}$$

3. On considère $\varphi_1 : u \mapsto \sqrt{n} \sin u$.
   φ_1 est bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \sqrt{n}]$, de classe $\mathcal{C}^1$.
   On peut faire le changement de variable : $t = \varphi_1(u)$:
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 u\right)^n (\sqrt{n} \cos u \mathrm{d}u) = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \mathrm{d}u$$
/1,5
$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n} W_{2n+1}}$$
   On considère $\varphi_2 : u \mapsto \sqrt{n} \tan u$.
   φ_2 est bijective de $[0, \arctan X]$ sur $[0, X]$, de classe $\mathcal{C}^1$.
   On peut faire le changement de variable : $t = \varphi_2(u)$:
$$\begin{aligned}
\int_0^X \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t &= \int_0^{\arctan(X)} \left(1 + \tan^2 u\right)^{-n} (\sqrt{n} \frac{1}{\cos^2 u} \mathrm{d}u) = \sqrt{n} \int_0^{\arctan(X)} (\cos^{-2} u)^{-n} \cos^{-2} u \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{-2} u)^{-n} \cos^{-2} u \mathrm{d}u - \int_{\arctan(X)}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{-2})^{-n} \cos^{-2} u \mathrm{d}u \\
&= \sqrt{n} W_{2n-2} - \int_{\arctan(X)}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} u \mathrm{d}u
\end{aligned}$$
/1,5

On a alors (par composition des limites) :

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t=\sqrt{n}W_{2n-2}-\lim_{X\to\infty}\int_{\arctan(X)}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}u\mathrm{d}u=\sqrt{n}W_{2n-2}+\lim_{Y\to\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{Y}\cos^{2n-2}u\mathrm{d}u$$

Or la fonction $u\mapsto\cos^{2n-2}u$ est continue donc admet une primitive C,

donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{Y}\cos^{2n-2}u\mathrm{d}u=C(Y)-C(\frac{\pi}{2})\underset{Y\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow}C(\frac{\pi}{2})-C(\frac{\pi}{2})=0$, par continuité.

Donc *\/1,5*

$$\boxed{\lim_{X\to+\infty}\int_0^X\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t=\sqrt{n}W_{2n-2}}.$$

4. On a donc d'après les deux questions précédentes :

$$\sqrt{n}W_{2n+1}\leqslant\ell\leqslant\sqrt{n}W_{2n-2}$$

Et $W_{2n-2}\leqslant W_{2n-3}$, par décroissance de (W_n) puis par relation entre W_k et W_{k+2} :

$$W_{2n-2}\leqslant W_{2n-3}=\frac{2n-1}{2n-2}W_{2n-1}=\frac{2n-1}{2n-2}\frac{2n+1}{2n}W_{2n+1}$$

Donc

$$\sqrt{n}W_{2n+1}\leqslant\ell\leqslant\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n-2)(2n)}\sqrt{n}W_{2n+1}$$

Or d'après la question A.6. : $\sqrt{n}W_{2n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ et par ailleurs : $\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{(2n-2)(2n)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$.

Donc, par théorème de convergence par encadrement : */2*

$$\boxed{\ell=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

5. Changements de variable.
   On considère $m\in\mathbb{R}$ et $s\in\mathbb{R}_+^*$
   (a) On fixe $m\in\mathbb{R}$, $s>0$, $x,y\in\mathbb{R}$.
   L'application $\psi:t\mapsto\frac{t-m}{s}$ est bijective de $[y,x]$ sur $\left[\frac{y-m}{s},\frac{x-m}{s}\right]$ (ou de $[x,y]$ sur $\left[\frac{x-m}{s},\frac{y-m}{s}\right]$ si $x<y$).
   Elle est également de classe $\mathcal{C}^1$. On fait le changement de variable $u=\psi(t)$: */1*

$$\boxed{\frac{1}{2s\ell}\int_y^x\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{s^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2s\ell}\int_{\frac{y-m}{s}}^{\frac{x-m}{s}}\exp\left(-u^2\right)s\mathrm{d}u=\frac{1}{2\ell}\left(G\left(\frac{x-m}{s}\right)-G\left(\frac{y-m}{s}\right)\right)}$$

   (b) Donc

$$\frac{1}{2s\ell}\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^x\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{s^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\ell}\lim_{x\to+\infty}\left(G\left(\frac{x-m}{s}\right)-G\left(\frac{-x-m}{s}\right)\right)=\frac{1}{2\ell}(2\ell)$$

\/1

$$\boxed{\frac{1}{2s\ell}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{s^2}\right)\mathrm{d}t=1}$$

   (c) Cette fois, on considère le changement de variable $u=\theta(t)$ avec $\theta:t\mapsto\sqrt{\pi}t$, $\mathcal{C}^1$-bijective :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi t^2}\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x}e^{-\pi t^2}\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\int_{-\sqrt{\pi}x}^{\sqrt{\pi}x}e^{-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\pi}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}G(\sqrt{\pi}x)$$

   par imparité de G. */1*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi t^2}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\ell=1}$$

D. Transformé de Laplace

Ici, il s'agit de la fonction $\hat{G} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}G(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-xt-t^2}\mathrm{d}t$.
On admet (résultat démontré en seconde année) que $\hat{G}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{G}'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-xt-t^2}\mathrm{d}t := \lim_{y\to\infty}\int_0^{y} -te^{-xt-t^2}\mathrm{d}t$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, **fixé** et $h : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-xt-t^2}$.
   h est dérivable, car c'est une fonction exponentielle composée avec un polynôme en t.
   $\forall\, t > 0$, /1
   $$\boxed{h'(t) = (-x-2t)e^{-xt-t^2}}$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}_+$
   $$x\int_0^y e^{-xt-t^2}\mathrm{d}t + 2\int_0^y te^{-xt-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^y (x+2t)e^{-xt-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^y (-h'(t))\mathrm{d}t = [-h(t)]_0^y$$
   /1,5
   $$\boxed{\forall\, y \in \mathbb{R}_+, \qquad x\int_0^y e^{-xt-t^2}\mathrm{d}t + 2\int_0^y te^{-xt-t^2}\mathrm{d}t = h(0) - h(y) = 1 - e^{-xy-y^2}}$$

3. D'après le résultat donné dans l'énoncé, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
   $$\begin{aligned}\hat{G}'(t) - \frac{x}{2}\hat{G}(t) &= \lim_{y\to\infty}\int_0^y -te^{-xt-t^2}\mathrm{d}t - \frac{x}{2}\lim_{y\to\infty}\int_0^y e^{-xt-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{y\to+\infty}\frac{-1}{2}\left(x\int_0^y e^{-xt-t^2}\mathrm{d}t + 2\int_0^y te^{-xt-t^2}\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{-1}{2}\lim_{y\to+\infty}(1-e^{-xy-y^2}) = \frac{-1}{2}\end{aligned}$$
   /2

   Par ailleurs, $\hat{G}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. /0,5
   Donc
   $$\boxed{\hat{G} \text{ est la solution du problème de Cauchy : } \begin{cases} y' - \frac{x}{2}y &= \frac{-1}{2} \\ y(0) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{cases}}$$

4. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1.
   On cherche les solutions homogènes : $y_H : x \mapsto C\exp(\int \frac{x}{2}\mathrm{d}x) = Ce^{\frac{x^2}{4}}$. /1
   Pour trouver une solution particulière, on peut appliquer la méthode de la variation de la constante :
   $$\tilde{y} : x \mapsto C(x)\exp(\frac{x^2}{4}) \Rightarrow \tilde{y}'(x) = C'(x)\exp(\frac{x^2}{4}) + \frac{x}{2}C(x)\exp(\frac{x^2}{4})$$
   $$\tilde{y}'(x) - \frac{x}{2}\tilde{y}(x) = C'(x)\exp(\frac{x^2}{4}) = -\frac{1}{2}$$
   $$C'(x) = -\frac{1}{2}\exp(-\frac{x^2}{4}) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow C(x) = -G\left(\frac{x}{2}\right)$$
   On trouve donc pour solutions de l'équation (E) :
   $$x \mapsto \left(C - G(\frac{x}{2})\right)\exp(\frac{x^2}{4})$$
   Et donc il existe $\hat{C} \in \mathbb{R}$ tel que $\hat{G} : x \mapsto \left(\hat{C} - G(\frac{x}{2})\right)\exp(\frac{x^2}{4})$. /3
   Enfin, on sait $\hat{G}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left(\hat{C} - G(0)\right)e^0 = \hat{C}$ car $G(0) = 0$. /1
   $$\boxed{\hat{G} : x \mapsto \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - G(\frac{x}{2})\right)\exp(\frac{x^2}{4})}$$