MPSI 3 - Fermat Le 10.11.18
2018-2019

Devoir surveillé n°3

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice - Théorème de Cantor-Bernstein

On démontre ici le théorème de Cantor-Bernstein.
$\exists\ i : E \to F, j : F \to E$ injectives $\Longrightarrow \exists\ b : E \to F$ bijective

A. Cas d'ensembles finis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note indifféremment $\mathbb{N}_n$, $[\![1, n]\!]$ ou $\{1, 2, \dots n\}$ le même ensemble : $\mathbb{N} \cap [1, n]$.
On note $\mathcal{R}$, la relation entre ensembles définies par :
$$E\,\mathcal{R}\,F \iff \exists\ \varphi : E \to F, \text{bijective}$$
On admet : *s'il existe une injection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_p$ alors $n \leqslant p$.*

1. Cardinal
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Montrer que si $n, p \in \mathbb{N}$ et $n < p$, alors on n'a pas $\mathbb{N}_n\,\mathcal{R}\,\mathbb{N}_p$.

On dit qu'un ensemble E est fini de cardinal $n(\in \mathbb{N})$, si $E\,\mathcal{R}\,\mathbb{N}_n$. On note $\mathrm{Card}(E) = n$
On dit qu'un ensemble E est fini, si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est fini de cardinal n.

   (c) Montrer l'équivalence : $E\,\mathcal{R}\,F \iff \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$
2. Soient E, un ensemble fini de cardinal n et F, un ensemble fini de cardinal m.
   On suppose que $f : E \to F$ est une application injective.
   (a) Montrer que $f(E)$ est un ensemble fini de cardinal n.
   (b) Montrer que $n \leqslant m$.
3. Démontrer le théorème de Cantor-Bernstein pour des ensembles E et F finis.

B. Cas d'ensembles quelconques

On considère deux ensembles E et F et deux applications injectives $i : E \to F$ et $j : F \to E$.
On définit par récurrence les sous-ensemble de E suivants :
$$A_0 = E \backslash j(F) \text{ et par récurrence : } \forall\ n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = (j \circ i)(A_n),$$
$$\text{puis } B = \{x \in E \mid \exists\ n \in \mathbb{N}, x \in A_n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \qquad C = E \backslash B.$$
On termine cette partie par l'étude d'un exemple. Ce n'est pas le plus difficile...

1. Donner une caractérisation des éléments de C en fonction des $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$
2. Construction de l'application.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in C$, il existe un unique $z \in F$ tel que $x = j(z)$.
   On notera cet élément $\Phi(x)$ (pour $x \in C$).
   (b) Pour $x \in B$, on note $\Phi(x) = i(x)$.
   Démontrer que l'on a ainsi bien défini une application $\Phi : E \to F$.
3. Injectivité de Φ.
   (a) Démontrer que les restrictions de Φ à B et à C sont injectives.
   (b) Considérons maintenant $x \in C$ et $y \in B$ tels que $\Phi(x) = \Phi(y)$. Démontrer que $x = (j \circ i)(y)$.
   (c) En déduire que Φ est injective.
4. Surjectivité de Φ. Démontrer que Φ est surjective et conclure.
5. Etude d'un exemple. On considère
   $E = \mathbb{N}$, $F = \{2, 3, \dots, \} = \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$, puis $i : E \to F$, $n \mapsto n + 4$ et $j : F \to E$, $n \mapsto n$.
   (a) Montrer que i et j sont bien injectives de E sur F et F sur E, respectivement.
   (b) Déterminer les ensembles A_n, B et C.
   (c) Déterminer l'application Φ

Problème - Autour de la « gaussienne »

Dans l'ensemble du problème, on note $g : x \mapsto e^{-x^2}$

A. Intégrales de Wallis

On note $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\mathrm{d}t$. Dans cette partie, on cherche la limite de $(nW_{2n+1}^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\mathrm{d}t$.
2. Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
3. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

4. En déduire que la suite $\big((n+1)W_{n+1}W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante. Donner sa valeur.
5. En exploitant 2. et 3. montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2n+1}{2n+2}W_{2n+1}W_{2n} \leqslant W_{2n+1}^2 \leqslant W_{2n+1}W_{2n}$$

6. Avec le théorème de convergence par encadrement, montrer que $(nW_{2n+1}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\pi}{4}$

B. Etude d'une primitive de g

1. Donner l'ensemble de définition de g, les variations de g. Tracer g.
2. Pourquoi peut-on affirmer que g admet une unique primitive qui s'annule en 0 ?

On note G, cette application. Ainsi, $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

3. Montrer que G est une fonction impaire.
4. Montrer que G est une application croissante et bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Pour cette seconde affirmation, on pourra montrer que pour tout $t > 1$, $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$

On admet que cela nous permet d'affirmer que G admet une limite en $+\infty$. On note :

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} G(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

On note également, conformément au programme de T.S. : pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = \lim_{y\to-\infty}\int_y^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

5. Montrer que pour tout réel x,

$$\int_{-\infty}^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = G(x) + \ell$$

C. Calcul de ℓ

On rappelle que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $1 + x \leqslant e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

1. Montrer que pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$.
En déduire que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \ell$$

2. De même montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.
En déduire que

$$\ell \leqslant \lim_{X\to+\infty}\int_0^X \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$$

3. Montrer à l'aide de changements de variable (différent) que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}W_{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to+\infty}\int_0^X \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t = \sqrt{n}W_{2n-2}$$

4. En exploitant les résultats des questions 3. et 6. de la partie A, montrer que

$$\ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5. Changements de variable.
   On considère $m \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}_+^*$
   (a) Avec un changement de variable, exprimer

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{2s\ell}\int_y^x \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{s^2}\right)\mathrm{d}t$$

   à l'aide d'une soustraction de G en deux nombres différents.
   (b) En déduire la valeur de $\frac{1}{2s\ell}\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{s^2}\right)\mathrm{d}t$, notée $\frac{1}{2s\ell}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{s^2}\right)\mathrm{d}t$
   (c) Que vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\mathrm{d}t$?

D. Transformé de Laplace

En S.I. (et ailleurs), on s'intéresse aux transformations de Laplace des fonctions considérées. Ici, il s'agit de la fonction $\hat{G} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}G(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-xt-t^2}\mathrm{d}t$.
On admet (résultat démontré en seconde année) que $\hat{G}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \hat{G}'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-xt-t^2}\mathrm{d}t := \lim_{y\to\infty}\int_0^y -te^{-xt-t^2}\mathrm{d}t$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, **fixé** et $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-xt-t^2}$.
   Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer h'.
2. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, en déduire la valeur de

$$x\int_0^y e^{-xt-t^2}\mathrm{d}t + 2\int_0^y te^{-xt-t^2}\mathrm{d}t$$

3. Montrer que $\hat{G}$ est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - \frac{x}{2}y &= -\frac{1}{2} \\ y(0) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases}$$

4. Donner une expression de $\hat{G}$ en fonction de G, de $x \mapsto \exp\left(\frac{x^2}{4}\right)\ldots$

Commentaires
En terminale, vous avez vu le théorème de Moivre-Laplace :
Si (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes suivent la même loi de Bernoulli de paramètre p.
On note $S_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{p(1-p)n}}$. Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(a \leqslant S_n \leqslant b) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2}\mathrm{d}t$
on dit que la suite S_n *converge en loi* vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

En réalité, le résultat est beaucoup plus puissant.
On a le théorème limite central dont les hypothèses sont plus simples :
Si (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes suivent une même loi (quelconque) d'espérance m et de variance σ^2.
On note $S_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm}{\sqrt{n}\sigma}$. Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(a \leqslant S_n \leqslant b) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2}\mathrm{d}t$

Ce théorème justifie toute l'importance donnée à cette fonction G appelée normale, ou de Gauss, ou de Laplace.