MPSI 3 - Fermat Le 08.11.18
2018-2019

Devoir à la maison n°3
CORRECTION

Exercice 1

1. f_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur cet ensemble.
On réalise deux intégrations par parties pour en trouver une, notée F_1,
(pour la première, on considère $u : t \mapsto 2t^2 + 3t - 5$ et $v : t \mapsto \frac{e^{2t}}{2}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\ldots$)

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int^x (2t^2+3t-5)e^{2t}\mathrm{d}t = \left[(2t^2+3t-5)\frac{e^{2t}}{2}\right]^x - \int^x (4t+3)\frac{e^{2t}}{2}\mathrm{d}t \\
&= \left(x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{5}{2}\right)e^{2x} - (4x+3)\,\tfrac{e^{2x}}{4} + \int^x 4\frac{e^{2x}}{4} \\
&= \left(x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{5}{2}\right)e^{2x} - \left(x + \tfrac{3}{4}\right)e^{2x} + \tfrac{1}{2}e^{2x} \\
&= \left(x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{11}{4}\right)e^{2x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\exists\, K \in \mathbb{R}, \qquad F_1 : x \mapsto \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{4}\right)e^{2x} + K}$$

Remarques !
Autre méthode, on cherche une solution sous la forme $x \mapsto (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$, nécessairement (en dérivant) :

$$[(2Ax^2 + 2Bx + 2C) + (2Ax + B)]e^{2x} = (2x^2 + 3x - 5)e^{2x}$$

On peut identifier :

$$\left\{\begin{array}{llllll} 2A & & & = & 2 \\ 2A & +2B & & = & 3 \\ & B & +2C & = & -5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} A & = 1 \\ B & = \frac{1}{2} \\ C & = \frac{-11}{4} \end{array}\right.$$

2. f_2 est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, elle admet donc des primitives sur cet ensemble.
Comme, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_2}$, $f_2(x) = 1 + \dfrac{2}{x+1}$,

$$\boxed{\exists\, K_1, K_2 \in \mathbb{R} \qquad F_2 : x \mapsto \left\{\begin{array}{ll} x + 2\ln(-x-1) + K_1 = x + \ln\left((x+1)^2\right) + K_1 & \text{si } x < 1 \\ x + 2\ln(x+1) + K_2 = x + \ln\left((x+1)^2\right) + K_2 & \text{si } x > 1 \end{array}\right.}$$

3. f_4 est définie et continue sur $\mathbb{R}+$, elle admet donc des primitives sur cet ensemble.
Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_4(x) = x\sqrt{x} - \sqrt{x} = x^{3/2} - x^{1/2}$,

$$\boxed{\exists\, K \in \mathbb{R}, \qquad F_4 : x \mapsto \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} + K}$$

4. f_5 est définie et continue sur $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq -2\} = \mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur cet ensemble.
D'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_5(x) = \dfrac{1}{2 + \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \dfrac{1+\tan\frac{x}{2}}{3+\tan\frac{x}{2}}$,

$$F_5(x) = \int^x \frac{1+\tan^2\frac{t}{2}}{3+\tan^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

On réalise le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$, donc $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{t}{2})\mathrm{d}t$.

$$F_5(x) = \int^{\tan\frac{x}{2}} \frac{2}{3+u^2}\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\int^{\tan\frac{x}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+[\frac{u}{\sqrt{3}}]^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]^{\tan\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{\exists\, K \in \mathbb{R}, \qquad F_5(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + K}$$

5. f_6 est définie et continue sur $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^4 > 0\} =]-1,1[$, elle admet donc des primitives sur cet ensemble.
On réalise le changement de variable $\cos u = t^2$ et donc $-\sin u\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$.

Remarques !

La fonction du changement de variable $t \mapsto \arccos(t^2)$ n'est pas bijective sur $]-1,1[$ (non injective).
Néanmoins, on peut se placer sur une partie de cet intervalle $I_1 =]-1,0]$ ou $I_2 = [0,1[$ afin de rendre la fonction bijective.
Comme x n'est pas clairement identifié (dans quel intervalle se trouve-t-il ? I_1 ou I_2), nous supposerons que tout se passe « au bon endroit ».
Finalement, ce qui va compter, c'est la forme de la solution...

$$F_6(x) = \int^x \frac{t\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^4}} = \int^{\arccos x^2} \frac{-\sin u \mathrm{d}u}{2(1+\cos u)\sqrt{1-\cos^2 u}} = \int^{\arccos x^2} \frac{-\mathrm{d}u}{2(1+\cos u)}$$

Puis $\arccos(x^2) \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on peut considérer $v = \tan \frac{u}{2}$ (élément de $[0,1]$).
C'est aussi la raison pour laquelle $\sqrt{1-\cos^2 u} = \sin u$.
C'est le même type de calcul que précédemment ($v = \tan \frac{u}{2}$) :

$$F_6(x) = \int^{\tan(\arccos(x^2)/2)} \frac{-\frac{2\mathrm{d}v}{(1+v^2)}}{2(1+\frac{1-v^2}{1+v^2})} = \int^{\tan(\arccos(x^2)/2)} \frac{-\mathrm{d}v}{2} = \frac{-1}{2}\tan(\frac{\arccos(x^2)}{2}) + K$$

$$\boxed{\exists\, K \in \mathbb{R}, \quad F_6 : x \mapsto \frac{-1}{2}\tan\left(\frac{\arccos(x^2)}{2}\right) + K}$$

6. Notons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet donc des primitives.

Piste de recherche...

Après quelques intégrations par parties, une formule semble s'imposer, on la démontre par récurrence

On considère G_n, la primitive qui s'annule en 1.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} x \frac{n!}{k!} \ln^k(x) - (-1)^n n!$ ».

— $g_0 = \ln^0 = (x \mapsto 1)$, de primitive $G_0 : x \mapsto x - 1 = x\frac{0!}{0!}\ln^0(x) - (-1)^0 0!$
Donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
On fait une intégration par parties avec $u(t) = \ln^{n+1}(t)$ et $v(t) = t$, de classe $\mathcal{C}^1$,

$$G_{n+1}(x) = \int_1^x \ln^{n+1}(t)\mathrm{d}t = [t\ln^{n+1}(t)]_1^x - \int_1^x t \times (n+1)\frac{1}{t}\ln^n(t)\mathrm{d}t = x\ln^{n+1}(x) - (n+1)G_n(x)$$

Puis en exploitant $\mathcal{P}_n$:

$$G_{n+1}(x) = x\frac{(n+1)!}{(n+1)!}\ln^{n+1}(x) - \sum_{k=0}^{n} x(-1)^{n-k}(n+1)\frac{n!}{k!}\ln^k(x) + (n+1)(-1)^n n!$$

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} x \frac{(n+1)!}{k!}\ln^k(x) - (-1)^{n+1}(n+1)!$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Donc les primitives de } g_n \text{ sont } x \mapsto x \times n! \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!}\ln^k(x) + K}$$

Problème

I. Modèle de Maltus

Il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que que X répond à l'équation différentielle :

$$X'(t) = rX(t) \qquad (1)$$

où r dépend du taux de mortalité et de natalité de l'espèce.

1. Si X est la population à l'instant t, alors pour tout temps t, $X(t) > 0$.
   Dans ce cas, le signe de r donne celui de la dérivée et donc des variations de X :

   - Si r est positif, la population croit (infiniment) car $X' > 0$.
   - Si r est négatif, la population décroit (infiniment) car $X' < 0$.

2. D'après le cours :

   Les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions de la forme $t \mapsto X_0 e^{rt}$ où X_0 est la condition initiale.

II. Modèle de Verhulst

On propose donc de remplacer l'équation précédente par l'équation introduite par Verhulst en 1838 :

$$X'(t) = r\left(1 - \frac{X(t)}{K}\right)X(t) \qquad (2)$$

où $r, K > 0$.

1. Capacité d'accueil
   (a) On a le tableau de signe

x	0	K	$+\infty$
signe de $\left(1 - \frac{x}{K}\right)$	$+$	0	$-$

   (b) On appelle K, la capacité d'accueil, car dès que $X(t) > K$, alors la dynamique de population devient négative : la population diminue.
   En revanche, tant que X n'atteint pas K, la dynamique est positive : la population augmente.

2. Résolution
   (a) $X(0) = X_0 > 0$, donc $0 \in I$

   $\boxed{I \text{ est non vide.}}$

   (b) Pour tout $t \in I$, $X(t) \neq 0$, et X est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur I.
   Ainsi $Y : t \mapsto \dfrac{1}{X(t)}$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,

$$Y'(t) = \frac{-X'(t)}{[X(t)]^2} = \frac{-r\left(1 - \frac{X(t)}{K}\right)X(t)}{[X(t)]^2} = \frac{-r\left(1 - \frac{X(t)}{K}\right)}{X(t)} = \frac{1}{K} - r\frac{1}{X(t)}$$

   $\boxed{Y \text{ est solution de } I \text{ de l'équation } y' + ry = \frac{r}{K}}$

   (c) Les solutions de l'équation homogène sont $t \mapsto Ae^{-rt}$.
   Une solution particulière est $t \mapsto \frac{1}{K}$.

   $\boxed{\text{Les solutions sont donc les applications } Y_A : t \mapsto \frac{1}{K} + Ae^{-rt}, \text{ avec } A \in \mathbb{R}}$

   (d) On trouve alors, de manière nécessaire et suffisante :
   les solutions de (2) sont les applications $X_A : t \mapsto \dfrac{1}{\frac{1}{K} + Ae^{-rt}} = \dfrac{K}{1 + AKe^{-rt}}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

   On a alors $X_A(0) = \dfrac{K}{1 + AK}$.

$$X_A(0) = X_0(\neq 0) \iff 1 + AK = \frac{K}{X_0} \iff A = \frac{1 - \frac{X_0}{K}}{X_0}$$

Et, par équivalence :

$$\boxed{\text{il existe une unique solution de (2) et de condition initiale } X(0) = X_0 \text{ est } X : t \mapsto \frac{\overbrace{K}^{\alpha}}{1 + \underbrace{\frac{K - X_0}{X_0}}_{\beta} e^{-rt}}}$$

(e) On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
— si $K \geqslant X_0$

$$0 < e^{-rt} \leqslant 1 \Longrightarrow K > X(t) \geqslant X_0$$

— si $K \leqslant X_0$

$$0 < e^{-rt} \leqslant 1 \Longrightarrow K < X(t) \leqslant X_0$$

$$\boxed{\text{Donc } I = \mathbb{R}}$$

3. (a) Aucun problème pour calculer la limite :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} X(t) = K}$$

(On retrouve la limite de capacité du milieu comme on aurait pu s'y attendre...)

(b) On a fait le calcul précédemment,

- si $X_0 = K$, X est constant et vaut K,
- si $X_0 > K$, X est décroissant de X_0 à K,
- si $X_0 = K$, X est croissant de X_0 à K.

(c) Tracer l'allure des courbes dans les cas $X_0 = K$, $X_0 > K$ et $X_0 < K$ sur un même graphique et interpréter les résultats obtenus.

4. Fonction réciproque.

(a) Si $X_0 \neq K$, X est continue (dérivable) sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone.

$$\boxed{\text{Donc } X \text{ établit une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } [X_0, K] \text{ (si } X_0 < K) \text{ ou sur } [K, X_0] \text{ (si } X_0 > K)}$$

(b) Soit $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times [X_0, K[$ (ou $\mathbb{R}_+ \times]K, X_0]$),

$$X(t) = y \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-rt}} = y \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{y} - 1 = \beta e^{-rt} \Longleftrightarrow \frac{\alpha - y}{\beta y} = e^{-rt}$$

$$\boxed{\text{Ainsi} \qquad X^{-1} : y \mapsto \frac{1}{r} \ln\left(\frac{\beta y}{\alpha - y}\right) = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{(K - X_0)y}{X_0(K - y)}\right)}$$

Donner une expression analytique de X^{-1}

(c) Aucun problème : X^{-1} est dérivable sur $[X_0, K[$ (ou sur $]K, X_0]$).
On a alors (calcul direct) (on a intérêt à écrire : $X^{-1}(y) = \frac{1}{r}(\ln(K - X_0) + \ln y - \ln X_0 - \ln(K - y)))$:

$$X^{-1}(y) = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{y} - \frac{-1}{K - y}\right) = \frac{1}{r}\frac{K}{(K - y)y}$$

Ou bien, on peut exploiter la « formule de Swan » :

$$X^{-1}(y) = \frac{1}{X'\big(X^{-1}(y)\big)} = \frac{1}{r\left(1 - \frac{X\left(X^{-1}(y)\right)}{K}\right) X\big(X^{-1}(y)\big)} = \frac{1}{r(1 - \frac{y}{K})y}$$

$$\boxed{X^{-1} \text{ est dérivable sur } [X_0, K[\text{ (ou }]K, X_0]) \text{ et (de deux façons) : } X^{-1} : y \mapsto \frac{1}{r}\frac{K}{(K - y)y}}$$

CORRECTION :

Complément pour l'étude de f_5.
Rappelons la correction imprimée :
f_5 est définie et continue sur $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq -2\} = \mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur cet ensemble.
D'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_5(x) = \dfrac{1}{2 + \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}} = \dfrac{1+\tan \frac{x}{2}}{3+\tan \frac{x}{2}}$,

$$F_5(x) = \int^x \frac{1+\tan^2 \frac{t}{2}}{3+\tan^2 \frac{t}{2}} \mathrm{d}t$$

On réalise le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$, donc $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1+\tan^2 \frac{t}{2})\mathrm{d}t$.

$$F_5(x) = \int^{\tan \frac{x}{2}} \frac{2}{3+u^2}\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\int^{\tan \frac{x}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+[\frac{u}{\sqrt{3}}]^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan \frac{u}{\sqrt{3}}\right]^{\tan \frac{x}{2}}$$

$$\boxed{\exists\ K \in \mathbb{R}, \qquad F_5(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + K}$$

En fait le changement de variable posée : $u = \tan \frac{t}{2}$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$.
Il s'agit de bijection d'intervalle de la forme $]-\pi + 2h\pi; \pi + 2h\pi[$ sur $\mathbb{R}$.
Donc les solutions obtenues sont plutôt :

$$\exists\ (K_h)_{h\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \qquad \forall\ x \in](2h-1)\pi; (2h+1)\pi[, F_5(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + K_h$$

Puis comme F_5 est dérivable, elle est nécessairement continue donc continue en $\frac{\pi}{2} + h\pi$.

$$\lim_{x\to((2h+1)\pi)^+} F_5(x) = \lim_{x\to((2(h+1)\pi)^-} F_5(x)$$

Et comme, par composition des limites :

$$\lim_{x\to((2h+1)\pi)^+} F_5(x) = \lim_{x\to((2h+1)\pi)^+} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + K_{h+1} = \lim_{y\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(y) + K_{h+1} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + K_{h+1}$$

$$\lim_{x\to((2h+1)\pi)^-} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + K_h = \lim_{y\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(y) + K_h = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + K_h$$

On a donc, pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$-\frac{\pi}{\sqrt{3}} K_{h+1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + K_h$$

Donc $K_{h+1} = K_h + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. On reconnait une suite arithmétique : $K_h = K_0 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} h$.
Et finalement, comme

$$x \in](2h-1)\pi; (2h+1)\pi[\iff \frac{x}{\pi} + 1 \in]2h, 2h+2[\iff \frac{x+\pi}{2\pi} \in]h, 2h+1[\iff h = \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor$$

on peut affirmer :

$$\boxed{\exists\ K (= K_0) \in \mathbb{R} \text{ tel que :} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad F_5(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor + K}$$