Devoir à la maison n°3

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1

Donner les ensembles de définition et calculer les primitives de fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto (2x^2 + 3x - 5)e^{2x}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x+3}{x+1}$
3. $f_4 : x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$
4. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$
   On posera $t = \tan \frac{x}{2}$
5. $f_6 : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$ *On posera* $\cos t = x^2$
6. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : x \mapsto \ln^n(x)$

Problème

Dans ce problème, on s'intéresse à quelques modèles de dynamique des populations.
On étudie des modèles d'évolution d'une population sans interaction avec d'autres espèces. Pour ce faire, on note $X(t)$ le nombre d'individus d'une espèce A donnée présents à l'instant t. On note de plus $X_0 = X(0)$ la condition initiale. On suppose bien entendu que $X_0 > 0$.

I. Modèle de Maltus

Un des modèles d'évolution les plus simples est le premier modèle introduit par Malthus en 1798. Considérant qu'une population est dans des conditions de vie idéale (aucun prédateur, espace de vie illimité, nourriture à volonté, pas de contrainte sociale, etc...) et que seul intervient la mortalité naturelle, on suppose que sa vitesse de croissance est proportionnelle au nombre d'individus.
Ainsi, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que que X répond à l'équation différentielle :

$$X'(t) = rX(t) \qquad (1)$$

où r dépend du taux de mortalité et de natalité de l'espèce.

1. Expliquer l'impact du signe de r sur l'évolution de la population.
2. Résoudre l'équation (1) vérifiant $X(0) = X_0$.

II. Modèle de Verhulst

En réalité, le modèle de Malthus n'est valable qu'à petite échelle et sur une durée limitée (linéarisation). En effet, quand on s'approche de la surpopulation, plusieurs problèmes se présentent rapidement : par exemple absence de nourriture suffisante, interactions avec d'autres espèces liés au manque d'espace (qui ne peut être illimité). Sans même parler de prédation, on est donc rapidement confronté à la limite du modèle précédent et le taux de reproduction r a donc tendance à diminuer quand on s'approche d'un certain seuil.
Pour traduire ceci, on propose donc de remplacer l'équation précédente par l'équation introduite par Verhulst en 1838 :

$$X'(t) = r\left(1 - \frac{X(t)}{K}\right)X(t) \qquad (2)$$

où $r, K > 0$.

1. Capacité d'accueil
   (a) Etudier le signe de $x \mapsto 1 - \dfrac{x}{K}$
   (b) En déduire pourquoi on peut appeler la constante K la « capacité d'accueil ».
2. Résolution

(a) On note $I = \{u \in \mathbb{R} \mid X(u) > 0\}$.
Montrer que I est non vide.

(b) On note $Y : t \mapsto \frac{1}{X(t)}$, pour tout $t \in I$.
Montrer que Y est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et avec un second membre.

(c) Déterminer Y.

(d) En déduire qu'il existe une unique solution de (2) et de condition initiale $X(0) = X_0$:

$$X : t \mapsto \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-rt}}$$

avec $\alpha, \beta > 0$ exprimés en fonction de K et de X_0

(e) Que vaut I finalement ?

3. (a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t)$

(b) Étudier les variations de X pour chacun des cas $X_0 = K$, $X_0 > K$ et $X_0 < K$.

(c) Tracer l'allure des courbes dans les cas $X_0 = K$, $X_0 > K$ et $X_0 < K$ sur un même graphique et interpréter les résultats obtenus.

4. Fonction réciproque.

(a) Montrer que X est bijective (dans les deux cas $X_0 \neq K$) sur des intervalles à préciser.

(b) Donner une expression analytique de X^{-1}

(c) Montrer que X^{-1} est dérivable sur un intervalle à préciser.
Et calculer de deux façons différentes une expression de $\left(X^{-1}\right)'$