Devoir à la maison n°2
CORRECTION

Exercice 1

On note $A(31+12i)$, $B(24+23i)$, $B'(24+12i)$, $A'(-31+12i)$ et $O(0)$.

1. Il suffit de calculer les distances OA et OB.

   $|OA| = (31-0)^2+(12-0)^2 = 961+144 = 1105$ $\qquad$ $|OB| = (24-0)^2+(23-0)^2 = 576+529 = 1105$

   $$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont sur un même cercle de centre } O \text{ (et de rayon } \sqrt{1105}).}$$

2. A' est également un élément du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{1105}$, donc d'après la propriété des intersections d'arcs (angle au centre est le double de l'angle sur le cercle) :

   $$\widehat{AOB} = 2\widehat{AA'B}$$

   Enfin, comme A', B' et A sont alignés (tous sur la droite d'équation $y = 12$), ona

   $$\widehat{AA'B} = \widehat{B'A'B}$$

   Enfin, on exploite la relation qui lie l'angle à l'arctan : $\arg(1+ix) = \arctan(x)$.

   $$\begin{aligned}\widehat{B'A'B} &= (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{i}) - (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{i}) = \arg(Z_B - Z_{A'}) - \arg(Z_{B'} - Z_{A'}) = \arg \tfrac{Z_B - Z_{A'}}{Z_{B'} - Z_{A'}} \\ &= \arg \frac{55+11i}{55} = \arg(1+\tfrac{1}{5}i) = \arctan(\tfrac{1}{5})\end{aligned}$$

   $$\boxed{\widehat{AOB} = 2\widehat{AA'B} = 2\widehat{B'A'B} = 2\arctan\frac{1}{5}}$$

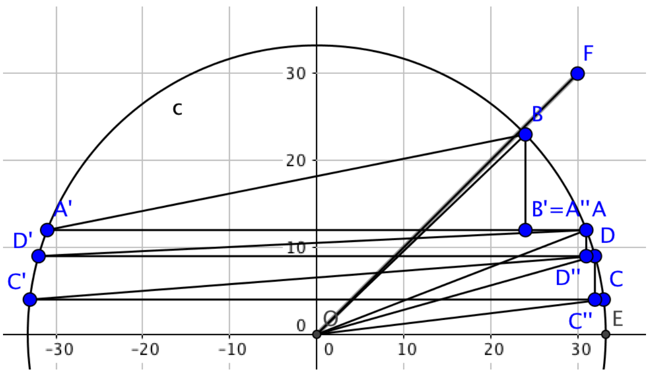
3. On crée des points supplémentaires sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{1105}$ (voir figure) :

   $$C(33+4i) \qquad D(32+9i) \qquad E(34+0i) \qquad F(30+30i)$$

   $$C'(-33+4i) \qquad C''(32+4i) \qquad D'(-32+9i) \qquad D''(31+9i)$$

   $$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \widehat{EOF} = \widehat{EOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOA} + \widehat{AOB} + \widehat{BOF} \\ &= \arg(z_C) + 2\arctan\left(\frac{DC''}{C'C''}\right) + 2\arctan\left(\frac{AD''}{D'D''}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arg(\tfrac{z_F}{z_B}) \\ &= \arg(33+4i) + 2\arctan\left(\frac{5}{65}\right) + 2\arctan\left(\frac{3}{63}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arg((1+i)(24-23i)) \\ &= \arctan\frac{4}{33} + 2\arctan\frac{1}{13} + 2\arctan\left(\frac{1}{21}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arg\big((24+23) + i(24-23)\big)\end{aligned}$$

   $$\boxed{\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{4}{33} + 2\arctan\frac{1}{13} + 2\arctan\frac{1}{21} + 2\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{47}}$$



Remarques !

Un autre façon consiste à exploiter les arguments des nombres complexes.
Notons :

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\frac{4}{33} + 2\arctan\frac{1}{13} + 2\arctan\frac{1}{21} + 2\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{47}\\
&= \arg(1+\tfrac{4}{33}i) + 2\arg(1+\tfrac{1}{13}i) + 2\arg(1+\tfrac{1}{21}i) + 2\arg(1+\tfrac{1}{5}i) + \arg(1+\tfrac{1}{47}i)\\
&= \arg(33+4i) + \arg((13+i)^2) + \arg((21+i)^2) + \arg((5+i)^2) + \arg(47+i)\\
&= \arg\left((33+4i)(168+26i)(440+42i)(24+10i)(47+i)\right)\\
&= \arg\left((33+4i)(84+13i)(220+21i)(12+5i)(47+i)\right)\\
&= \arg\left((2720+765i)(2535+1352i)(47+i)\right) = \arg\left((32+9i)(15+8i)(47+i)\right)\\
&= \arg\left((408+391i)(47+i)\right) = \arg\left((24+23i)(47+i)\right) = \arg(1105+1105i) = \tfrac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\theta = \arctan\frac{4}{33} + 2\arctan\frac{1}{13} + 2\arctan\frac{1}{21} + 2\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{47} = \frac{\pi}{4}}$$

Problème

I. Calculs

1. Dans cette question, on note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Soit $q \in \mathbb{N}$.
   On note que $1 + j = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   (a)
   $$\mathrm{Re}((1+j)^q) = \mathrm{Re}((e^{i\frac{\pi}{3}})^q) = \mathrm{Re}(e^{i\frac{q\pi}{3}})$$
   $$\boxed{\mathrm{Re}((1+j)^q) = \cos\frac{q\pi}{3}.}$$
   (b) Puis,
   $$\mathrm{Re}((1+j)^q j) = \mathrm{Re}(e^{i\frac{q\pi}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}) = \mathrm{Re}(e^{i\frac{(q+2)\pi}{3}})$$
   $$\mathrm{Re}((1+j)^q \bar{j}) = \mathrm{Re}(e^{i\frac{q\pi}{3}}e^{i\frac{4\pi}{3}}) = \mathrm{Re}(e^{i\frac{(q+4)\pi}{3}})$$
   Donc
   $$\boxed{\mathrm{Re}((1+j)^q j) = \cos\frac{(q+2)\pi}{3} \text{ et } \mathrm{Re}((1+j)^q \bar{j}) = \cos\frac{(q+4)\pi}{3} = \cos\frac{(q-2)\pi}{3}.}$$

2. En fait c'est une autre technique...
   Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $r, k \in \mathbb{N}$.
   $$\begin{aligned}(1+\omega^k)^q\overline{\omega^{rk}} &= (1+e^{i\frac{2k\pi}{n}})^q\overline{e^{i\frac{2rk\pi}{n}}} = [e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{-i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}})]^q e^{-i\frac{2rk\pi}{n}}\\
   &= (2\cos\tfrac{k\pi}{n})^q e^{i\frac{(q-2r)k\pi}{n}} = 2^q\cos^q\tfrac{k\pi}{n}e^{i\frac{(q-2r)k\pi}{n}}\end{aligned}$$
   $$\boxed{\mathrm{Re}((1+\omega^k)^q\overline{\omega^{rk}}) = 2^q\cos^q\frac{k\pi}{n}\cos\frac{(q-2r)k\pi}{n}}$$

Remarques !

Pour $n = 3$, on trouve $2^q\cos^q\frac{k\pi}{3} = 2^q\begin{cases} 0 & \text{si } k \equiv 0[3]\\ (\frac{1}{2})^q & \text{si } k \equiv 1 \text{ ou } 5[6]\\ (-\frac{1}{2})^q & \text{si } k \equiv 2 \text{ ou } 4[6]\end{cases}$
Puis les calculs précédents sont faits avec $(r,k) = (0,1)$, $(r,k) = (-1,1)$ et $(r,k) = (1,1)$.
Donc, dans tous les cas, $2^q\cos^q\frac{k\pi}{3} = 1$.
Alors que $\cos\frac{(q-2r)k\pi}{n}$ vaut respectivement $\cos\frac{q\pi}{n}$, $\cos\frac{(q+2)\pi}{n}$ et $\cos\frac{(q-2)\pi}{n}$

3. Soit $p \in \mathbb{Z}$, notons que
   $$S_p = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{pk} = \sum_{k=0}^{n-1}(\omega^p)^k$$
   — si $\omega^p = 1$, c'est-à-dire $e^{2i\frac{p\pi}{n}} = 0 \Longleftrightarrow 2\frac{p\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \Longleftrightarrow p \equiv 0[n] \Longleftrightarrow n|p$,
   $$S_p = \sum_{k=0}^{n-1}1^k = n$$

— si $\omega^p \neq 1$, c'est-à-dire $p \notin n\mathbb{Z}$,

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \frac{\omega^{pn}-1}{\omega-1} = \frac{(\omega^n)^p-1}{\omega-1} = \frac{1-1}{\omega-1} = 0$$

$$\boxed{S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{pk} = \begin{cases} n & \text{si } n|p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

II. Définitions et propriétés

Les transformés de FOURIER des polynômes P sont les fonctions polynomiales $\mathcal{F}(P)$ et $\overline{\mathcal{F}}(P)$ définies par

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \mathcal{F}(P)(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) z^k \\ \overline{\mathcal{F}}(P)(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k}) z^k \end{cases}$$

1. Quelques exemples.
   (a) $f : z \mapsto 1$ et $g : z \mapsto 1 + z + \cdots + z^{n-1}$.

$$\mathcal{F}(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\omega^k) z^k = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = g(z)$$

$$\mathcal{F}(g)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} g(\omega^k) z^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{h=0}^{n-1} (\omega^k)^h \right) z^k = \sum_{k=0}^{n-1} (S_k)\, z^k = nz^0 = nf(z)$$

   d'après la dernière question du préliminaire.

$$\boxed{\text{Ici, pour cet exemple, } \mathcal{F}(f) = g \text{ et } \mathcal{F}(g) = n \times f.}$$

   (b) On note $\mathrm{Id} : z \mapsto z$ et $A = \mathcal{F}(\mathrm{Id})$.

$$A(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Id}(\omega^k) z^k = \sum_{h=0}^{n-1} (\omega z)^h$$

   On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}(A)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{h=0}^{n-1} (\omega \times \omega^k)^h \right) z^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{h=0}^{n-1} (\omega^{(k+1)h} \right) z^k = \sum_{k=0}^{n-1} (S_{k+1})\, z^k = nz^{n-1}$$

   car le seul nombre k de 0 à $n-1$ tel que $n|k+1$ est $h = n-1$.

$$\overline{\mathcal{F}}(A)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{h=0}^{n-1} (\omega \times \omega^{-k})^h \right) z^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{h=0}^{n-1} (\omega^{(-k+1)h} \right) z^k = \sum_{k=0}^{n-1} (S_{-k+1})\, z^k = nz^1$$

   car le seul nombre k de 0 à $n-1$ tel que $n| -k+1$ est $k = 1$.

$$\boxed{\text{Bilan : } \mathcal{F}(A)(z) = nz^{n-1} \text{ et } \overline{\mathcal{F}}(A)(z) = nz = n\mathrm{Id}(z).}$$

2. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et P et Q deux polynômes de degré inférieur à $n-1$.
   Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda P + Q)(z) &= \sum_{k=0} (\lambda P + Q)(\omega^k) z^k = \sum_{k=0} [\lambda P(\omega^k) + Q(\omega^k)] z^k = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) z^k + \sum_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k) z^k \\ &= \lambda \mathcal{F}(P)(z) + \mathcal{F}(Q)(z) = [\lambda \mathcal{F}(P) + \mathcal{F}(Q)](z) \end{aligned}$$

   De même, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}(\lambda P + Q)(z) &= \sum_{k=0} (\lambda P + Q)(\omega^{-k}) z^k = \sum_{k=0} [\lambda P(\omega^{-k}) + Q(\omega^{-k})] z^k = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k}) z^k + \sum_{k=0}^{n-1} Q(\omega^{-k}) z^k \\ &= \lambda \overline{\mathcal{F}}(P)(z) + \overline{\mathcal{F}}(Q)(z) = [\lambda \overline{\mathcal{F}}(P) + \overline{\mathcal{F}}(Q)](z) \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C},\ P, Q, \text{ polynômes de degré} \leqslant n-1,\ \mathcal{F}(\lambda P + Q) = \lambda \mathcal{F}(P) + \mathcal{F}(Q),\ \overline{\mathcal{F}}(\lambda P + Q) = \lambda \overline{\mathcal{F}}(P) + \overline{\mathcal{F}}(Q)}$$

3. Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, une fonction polynomiale.
   Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}(P)(z) = \sum_{h=0}^{n-1} P(\omega^h) z^h$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(P))(z) &= \sum_{r=0}^{n-1} \mathcal{F}(P)(\omega^{-r}) z^r = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{n-1} P(\omega^h)\omega^{-rh} z^r = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{kh}\omega^{-rh} z^r \\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\sum_{h=0}^{n-1} \omega^{(k-r)h}\right)\right] z^r = \sum_{r=0}^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k S_{k-r}\right] z^r\end{aligned}$$

   Or pour $r, k \in [\![0, n-1]\!]$, $k - r \in [\![-n+1, n-1]\!]$, et le seul entier de $[\![-n+1, n-1]\!]$ divisible par n est 0.
   Dans la somme, nécessairement : $k - r = 0$ i.e. $r = k$ et alors $S_0 = n$:

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(P))(z) = \sum_{r=0}^{n-1} n a_r z^r$$

   Ainsi,

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(P))(z) = nP(z)}$$

   On admet de même que $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(P))(z) = nP(z)$.

III. Division euclidienne de polynôme à coefficients entiers

Soit H une fonction polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ à coefficients entiers relatifs :

$$\exists\, q \in \mathbb{N}, \exists\, (h_0, h_1, \dots h_{q-1}) \in \mathbb{Z}^q \mid H : z \mapsto \sum_{k=0}^{q-1} h_k z^k$$

L'objectif de cette partie est de prouver qu'il existe deux fonctions polynomiales Q et R, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, à coefficients entiers relatifs, telles que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, H(z) = (z^n - 1)Q(z) + R(z) \qquad \text{et } R \text{ est de degré} \leqslant n - 1$$

1. Soit $j \in \mathbb{N}$.
   — Si $j \leqslant n - 1$, alors $z^j = (z^n - 1) \times 0 + z^j$.
   Donc avec $Q_j = 0$ et $R_j(z) = z^j$ de degré inférieur à $n - 1$, la réponse est apportée.
   — Si $j \geqslant n$. On peut supposer que $j = in + r$ avec $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N} \cap [0, n[$.

$$z^j = z^{in+r} = (z^n)^i z^r$$

   On exploite le télescopage :

$$z^j - z^r = z^r\left((z^n)^i - 1\right) = z^r\left(\sum_{k=0}^{i-1} (z^n)^{k+1} - (z^n)^k\right) = z^r(z^n - 1)\left(\sum_{k=0}^{i-1} (z^n)^k\right)$$

   Donc

$$z^j = (z^n - 1)\underbrace{\sum_{k=0}^{i-1} z^{kn+r}}_{=Q_j(z)} + \underbrace{z^r}_{=R_j(z)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Dans tous les cas, pour tout } j \in \mathbb{N}, \text{ il existe deux fonctions polynomiales à coefficients entiers} \\ \text{relatifs } Q_j \text{ et } R_j \text{ telles que } \forall\, z \in \mathbb{C}, z^j = (z^n - 1)Q_j(z) + R_j(z) \qquad \text{et } R_j \text{ est de degré} \leqslant n - 1\end{array}}$$

2. On conserve, bien évidemment, les notations de l'énoncé. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$H(z) = \sum_{k=0}^{q-1} h_k z^k = \sum_{k=0}^{q-1} h_k[(z^n - 1)Q_k(z) + R_k(z)] = (z^n - 1)\sum_{k=0}^{q-1} h_k Q_k(z) + \sum_{k=0}^{q-1} h_k R_k(z)$$

Or chaque R_k est de degré $\leqslant n-1$, il en est de même de la combinaison linéaire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} h_k R_k$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{il existe } Q \text{ et } R\text{, polynômes à coefficients entiers relatifs (voir remarque), telles que}\\ \forall\, z \in \mathbb{C}, H(z) = (z^n-1)Q(z) + R(z) \qquad \text{et } R \text{ est de degré} \leqslant n-1 \\ Q(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} h_k Q_k(z) \text{ et } R(z) = \sum_{k=0}^{q-1} h_k R_k(z)\end{array}}$$

Remarques !

On peut même être encore plus précis, en notant $i = k//n$ (resp. $r = k\%n$), le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de k par n (comme sous Python) :

$$R(z) = \sum_{k=0}^{q-1} h_k z^{k\%n} \qquad Q(z) = \sum_{k=0}^{q-1} h_k \left(\sum_{h=0}^{k//n-1} z^{hn+k\%n} \right)$$

IV. Sommes de coefficients binomiaux

Soient $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

Pour tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, on note $D_r = \{j \in [\![0, q]\!] \mid j \equiv r[n]\}$ et on pose $a_r = \displaystyle\sum_{j \in D_r} \binom{q}{j}$.

On pose $H(z) = (1+z)^q$ et $A(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_{n-1} z^{n-1}$. On rappelle que $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. La formule du binôme de Newton donne $H(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} z^j$.

   Soit ξ, une racine n^{e}de l'unité : $\xi^n = 1$ et par suite :

   $$\forall\, j \in D_r, \qquad \xi^j = \xi^{an+r} = \xi^r$$

   Donc, en regroupant par paquets :

   $$(1+\xi)^q = H(\xi) = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \xi^j = \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{j \leqslant q, j \equiv r[n]} \binom{q}{j} \xi^r \right) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r \xi^r = A(\xi)$$

   $$\boxed{\text{Pour tout } \xi\text{, racine } n^{\text{e}}\text{de l'unité : } (1+\xi)^q = A(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xi^k}$$

2. (a) Il suffit d'appliquer le résultat démontré à la partie précédente pour H polynôme à coefficients réels :

   $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il existe deux fonctions polynomiales } Q \text{ et } R \text{ de } \mathbb{C} \text{ dans } \mathbb{C} \text{ à coefficients entiers relatifs telles que}\\ R \text{ est de degré } \leqslant n-1 \qquad \text{et } \forall\, z \in \mathbb{C}, H(z) = (1+z)^q = (z^n-1)Q(z) + R(z)\end{array}}$$

   (b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et comme $\omega^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ est une racine n^{e}de l'unité.

   $$H(\omega^k) = 0 \times Q(\omega^k) + R(\omega^k) = A(\omega^k)$$

   Donc le polynôme $R - A$ qui admet n racines distinctes : $\{\omega^k\}_{k \in [\![0,n-1]\!]}$.

   Or il est de degré inférieur ou égal à $n-1$.

   Dans ce cas là $R - A$ est le polynôme nul, i.e.

   $$\boxed{R = A.}$$

3. Par suite, et d'après la question $II.3$,

   $$\boxed{A = R = \frac{1}{n}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(R))}$$

   On a vu que $R(\omega^k) = H(\omega^k)$ et donc

   $$\mathcal{F}(R)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} R(\omega^k) z^k = \sum_{k=0}^{n-1} H(\omega^k) z^k$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$A(z) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} H(\omega^k)\omega^{-rk} \right) z^r$$

Et par unicité d'écriture sur la base $(1, z, \dots z^{n-1})$:

$$\boxed{\forall\ r \in [\![0, n-1]\!], \qquad a_r = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} H(\omega^k)\omega^{-kr} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^q \omega^{-kr}}$$

4. Pour cette question, les sommes sont définies modulo 3.
<u>On considère donc $n = 3$ et $\omega = j$.</u> Soit $q \in \mathbb{N}$,
<u>Dans le cas général avec $r \in \{0, 1, 2\}$.</u> Et puisqu'il s'agit de nombres réels, on peut prendre les parties réelles :

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leqslant k \leqslant q; k \equiv r[3]} \binom{q}{k} &= a_r = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{2} (1+j^k)^q j^{-kr} \\
&= \frac{1}{3} \left(\underbrace{2^q}_{k=0} + \underbrace{(1+j)^q j^{-r}}_{k=1} + \underbrace{(1+j^2)^q j^{-2r}}_{k=2} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(2^q + 2\mathrm{Re}\left((1+j)^q j^{-r}\right) \right)
\end{aligned}$$

car

$$\overline{(1+j)^q j^{-r}} = \overline{(1+j)^q}\,\overline{j^{-r}} = (\overline{1+j})^q \overline{j}^{-r} = (1+j^2)^q j^{-2r}$$

Donc d'après les calculs de la partie, en prenant respectivement $r = 0$, puis $r = 1$ et $r = 2$ Pour $r = 0$, puis $r = 1$ et $r = 2$, comme $j^{-1} = j^2$ et $j^{-2} = j$, on trouve :

$$\boxed{\sum_{0 \leqslant k \leqslant q; k \equiv 0[3]} \binom{q}{k} = a_0 = \frac{1}{3} \left(2^q + 2\cos\frac{q\pi}{3} \right)}$$

$$\boxed{\sum_{0 \leqslant k \leqslant q; k \equiv 1[3]} \binom{q}{k} = a_1 = \frac{1}{3} \left(2^q + 2\cos\frac{(q+4)\pi}{3} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leqslant k \leqslant q; k \equiv 2[3]} \binom{q}{k} = a_2 = \frac{1}{3} \left(2^q + 2\cos\frac{(q+2)\pi}{3} \right)}$$

Et dans le cas général, la méthode est la même (en prenant les parties réelles, puisque ce sont des nombres réels) :

$$\begin{aligned}
\forall\ r \in [\![0, n-1]\!], \qquad \sum_{0 \leqslant k \leqslant q; k \equiv r[3]} \binom{q}{k} &= a_r = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^q \omega^{-kr} \\
&= \frac{1}{n} \left((1+1)^q \omega^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Re}\big((1+\omega^k)^q \omega^{-kr}\big) \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(2^q + 2^q \sum_{k=1}^{n-1} \cos^q \frac{k\pi}{n} \cos\frac{k(q-2r)\pi}{n} \right)
\end{aligned}$$

d'après la première partie

$$\boxed{\forall\ r \in [\![0, n-1]\!], \sum_{0 \leqslant k \leqslant q; k \equiv r[3]} \binom{q}{k} = \frac{1}{n} \left(2^q + 2^q \sum_{k=1}^{n-1} \cos^q \frac{k\pi}{n} \cos\frac{k(q-2r)\pi}{n} \right)}$$