Devoir surveillé n°2
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrement) selon la qualité des copies.
Nous soulignons dans la correction, les arguments à écrire absolument !

Exercice 1

1. Deux démonstrations différentes de (IAG_3)
   (a) Première démonstration.
   Le plus simple est de développer la partie de droite (**on laisse les traces des calculs sur la copie**).
   Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] &= \frac{1}{2}(a+b+c)[a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+c^2+a^2-2ca] \\ &= (a+b+c)[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)] \\ &= a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-a^2b-a^2c-b^2c \\ &\qquad -b^2a-c^2a-c^2b-3abc \\ &= a^3+b^3+c^3-3abc\end{aligned}$$

   Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ et $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$, $c = \sqrt[3]{z}$, tous positifs.
   Alors

$$x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} = a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geqslant 0$$

   Donc *1,5*

$$\boxed{\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_+, \qquad \sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3} \qquad (IAG_3)}$$

   (b) Seconde démonstration.
   On fixe $y, z \in \mathbb{R}_+$ et on considère $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x+y+z)^3 - 27xyz$.
   φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\varphi'(x) = 3(x+y+z)^2 - 27yz$$

   Alors $\varphi'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $(x+y+z)^2 \geqslant 9yz$ i.e. $x \geqslant -y-z+3\sqrt{yz}$
   (on n'a pas $x \leqslant -y-z-3\sqrt{yz}$ car $x > 0$).
   Donc φ est décroissante sur $[0, -y-z+3\sqrt{yz}]$, puis croissante sur $[-y-z+3\sqrt{yz}, +\infty[$.
   Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(-y-z+3\sqrt{yz})$.
   Or

$$\varphi(-y-z+3\sqrt{yz}) = (3\sqrt{yz})^3 + 27(y^2z+z^2y-3(yz)^{3/2}) = 27[yz(y+z-2(yz)^{1/2}] = 27yz(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 \geqslant 0$$

   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(-y-z+3\sqrt{yz}) \geqslant 0$ */2*

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_+, \qquad 27xyz \leqslant (x+y+z)^3$$

$$\boxed{\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_+, \qquad \sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3} \qquad (IAG_3)}$$

   (c) On peut raisonner à partir de l'une ou l'autre des démonstrations.
   Il faut reprendre les cas d'inégalité et voir les situations qui conduisent à une égalité.
   Par exemple avec la première démonstration :
   il y a une égalité si et seulement si $\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = 0$
   si et seulement si $a+b+c = 0$ ou $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0$
   si et seulement si $a+b+c = 0$ ou $(a = b$ et $b = c$ et $c = a)$
   si et seulement si $a = b$ et $b = c$ et $c = a$ (car $a, b, c \geqslant 0$).
   Cela correspond à $x = y = z$.
   Il n'y a pas besoin de faire une réciproque (car on a raisonné par équivalences). *1,5*

$$\boxed{\text{l'inégalité } (IAG_3) \text{ est égalité ssi } x = y = z}$$

Remarques !

Si l'on raisonne avec l'autre démonstration, il faut et il suffit $\varphi'(-y-z+\sqrt[3]{yz})=0$, i.e $y=z$.
Puis alors $x=-y-z+\sqrt[3]{yz}=-2y+3y=y$

(d) En prenant $X=\frac{1}{x}$, $Y=\frac{1}{y}$ et $Z=\frac{1}{z}$, on a $\underline{X,Y,Z>0}$,

$$\sqrt[3]{XYZ}\leqslant\frac{1}{3}X+Y+Z\Longrightarrow\frac{3}{X+Y+Z}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{XYZ}}$$

Et donc *{/1,5}*

$$\boxed{\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\leqslant\sqrt[3]{xyz}\qquad(IGH_3)}$$

2. Application. On considère $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $x+y+z=1$.

(a) Minoration. On a vu que pour $x,y,z\in\mathbb{R}_+$,

$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\leqslant\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}$$

Donc dans le cas $x+y+z=1$, on a donc

$$9\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

et donc

$$xy+yz+xz-2xyz=xyz\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-2\right)\geqslant 7xyz$$

Ainsi, *{/2}*

$$\boxed{xy+yz+xz-xyz\geqslant 0}$$

(b) Majoration.

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z)=1-2(x+y+z)+4(xy+yz+xz)-8xyz=-1+4[(xy+yz+xz)-2xyz]$$

Donc

$$\underline{xy+yz+xz-2xyz=\frac{(1-2x)(1-2y)(1-2z)+1}{4}}$$

• Ou bien $\underline{1-2x\geqslant 0,\ 1-2y\geqslant 0\text{ et }1-2z\geqslant 0.}$
Dans ce cas, on peut appliquer IAG_3, et donc

$$\frac{(1-2x)(1-2y)(1-2z)+1}{4}\leqslant\frac{\left(\frac{1-2x+1-2y+1-2z}{3}\right)^3+1}{4}=\frac{\frac{1}{3^3}+1}{4}=\frac{28}{27\times 4}=\frac{7}{27}$$

/1,5

$$xy+yz+xz-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$$

• Ou bien (au moins) l'un des facteurs est strictement négatif.
Sans perte de généralité, on peut supposer $1-2x>0$, donc $x>\frac{1}{2}$ et alors $y+z<\frac{1}{2}$.
et donc on a toujours : $1-2y\geqslant 0$ et $1-2z\geqslant 0$.
En fait, il ne peut y avoir au plus qu'un facteurs du type $1-2x$ négatif. Ainsi $(1-2x)(1-2y)(1-2z)\leqslant 0$ et donc

$$xy+yz+xz-2xyz\leqslant\frac{1}{4}=\frac{7}{28}\leqslant\frac{7}{27}$$

Dans tous les cas : */1,5*

$$\boxed{xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}}$$

(c) On a donc :

$$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$$

$\boxed{\text{En } x=0 \text{ et } y=0 \text{ et } z=1 \text{ (ou } x=1 \text{ ou } y=1\text{), la minoration est optimale.}}$

$\boxed{\text{En } x=y=z=\frac{1}{3}\text{, la majoration est optimale.}}$

/1,5

Exercice 2

A. Structure de $\mathbb{H}$

1. (a) On applique les règles : Soient $z = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ et $z' = a' + b'\mathrm{i} + c'\mathrm{j} + d'\mathrm{k} \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} z + z' &= (a+a') + (b+b')\mathrm{i} + (c+c')\mathrm{j} + (d+d')\mathrm{k} \\ &= (a'+a) + (b'+b)\mathrm{i} + (c'+c)\mathrm{j} + (d'+d)\mathrm{k} \qquad \text{car } \underline{\mathbb{R} \text{ est commutatif}} \\ &= z' + z \end{aligned}$$

/1

$$\boxed{(\mathbb{H}, +) \text{ est commutatif}}$$

Pour démontrer la non-commutativité, il suffit de <u>trouver deux éléments qui ne commutent pas</u>.

$$\mathrm{i} \times \mathrm{j} = 0 + 0\mathrm{i} + 0\mathrm{j} + 1\mathrm{k} = \mathrm{k}$$

car ici on a $b = 1$ et $c' = 1$ et les autres nombres sont nuls.

De même *(/1)*

$$\mathrm{j} \times \mathrm{i} = 0 + 0\mathrm{i} + 0\mathrm{j} + (-1)\mathrm{k} = -\mathrm{k}$$

$$\boxed{(\mathbb{H}, \times) \text{ n'est pas commutatif.}}$$

(b) Soit $z = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in \mathbb{H}$.
On remarque que $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$ et $\mathrm{ij} = \mathrm{k} = -\mathrm{ji}$, $\mathrm{jk} = \mathrm{i} = -\mathrm{kj}$ et $\mathrm{ki} = \mathrm{j} = -\mathrm{ik}$.
Ainsi $\mathrm{i}1\mathrm{i} = -1$, $\mathrm{iii} = -\mathrm{i}$, $\mathrm{iji} = \mathrm{j}$ et $\mathrm{iki} = \mathrm{k}$
Puis $\mathrm{j}1\mathrm{j} = -1$, $\mathrm{jij} = \mathrm{i}$, $\mathrm{jjj} = -\mathrm{j}$ et $\mathrm{jkj} = \mathrm{k}$
Et $\mathrm{k}1\mathrm{k} = -1$, $\mathrm{kik} = \mathrm{i}$, $\mathrm{kjk} = \mathrm{j}$ et $\mathrm{kkk} = -\mathrm{k}$
Enfin par distributivité : *(/1)*

$$z + \mathrm{i}z\mathrm{i} + \mathrm{j}z\mathrm{j} + \mathrm{k}z\mathrm{k} = (a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}) + (-a - b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}) + (-a + b\mathrm{i} - c\mathrm{j} + d\mathrm{k}) + (-a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} - d\mathrm{k})$$

$$\boxed{z + \mathrm{i}z\mathrm{i} + \mathrm{j}z\mathrm{j} + \mathrm{k}z\mathrm{k} = -2a}$$

2. (a) Soit $z = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in \mathbb{H}$,

$$z \times \overline{z} = (aa + bb + cc + dd) + (-ab + ab - cd + cd)\mathrm{i} + (-ac + ac - db + db)\mathrm{j} + (-ad + ad - bc + bc)\mathrm{k}$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}_+$$

De même : *(/1)*

$$\overline{z} \times z = (aa + bb + cc + dd) + (ab - ab + cd - cd)\mathrm{i} + (ac - ac + db - db)\mathrm{j} + (ad - ad + bc - bc)\mathrm{k}$$

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{H}, \qquad z \times \overline{z} = \overline{z} \times z \in \mathbb{R}_+.}$$

(b) On note $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.
Comme $\overline{\overline{z}} = z$ (il suffit d'écrire z algébriquement) : *(/1)*

$$\boxed{|\overline{z}| = |z|}$$

Piste de recherche...

Comme z' et z ne commutent pas, on ne peut pas reproduire la même démonstration que dans le cours pour les nombres complexes. Par ailleurs, il n'a pas été demandé de prouver (est-ce vrai) que $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$...
On va calculer directement $|zz'|$

Soient $z = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$, $z' = a' + b'\mathrm{i} + c'\mathrm{j} + d'\mathrm{k} \in \mathbb{H}$.
On sait que $|z|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et $|z'|^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2$.
Puis :

$$zz' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + a'b + cd' - c'd)\mathrm{i} + (ac' + a'c + db' - d'b)\mathrm{j} + (ad' + a'd + bc' - b'c)\mathrm{k}$$

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= (aa' - bb' - cc' - dd')^2 + (ab' + a'b + cd' - c'd)^2 + (ac' + a'c + db' - d'b)^2 + (ad' + a'd + bc' - b'c)^2 \\ &= [(aa')^2 + (bb')^2 + (cc')^2 + (dd')^2 - 2aa'bb' - 2aa'cc' - 2aa'dd' + 2bb'cc' + 2bb'dd' + 2cc'dd'] \\ &\quad + [(ab')^2 + (ba')^2 + (cd')^2 + (dc')^2 + 2ab'ba' + 2ab'cd' - 2ab'dc' + 2ba'cd' - 2ba'dc' - 2cd'dc'] \\ &\quad + [(ac')^2 + (ca')^2 + (db')^2 + (bd')^2 + 2ac'ca' + 2ac'db' - 2ac'bd' + 2ca'db' - 2ca'bd' - 2db'bd'] \\ &\quad + [(ad')^2 + (da')^2 + (bc')^2 + (cb')^2 + 2ad'da' + 2ad'bc' - 2ad'cb' + 2da'bc' - 2da'cb' - 2bc'cb'] \\ &= (aa')^2 + (bb')^2 + (cc')^2 + (dd')^2 + (ab')^2 + (ba')^2 + (cd')^2 + (dc')^2 \\ &\quad + (ac')^2 + (ca')^2 + (db')^2 + (bd')^2 + (ad')^2 + (da')^2 + (bc')^2 + (cb')^2 \\ &= a^2(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) + b^2(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) \\ &\quad + c^2(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) + d^2(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = |z|^2 \times |z'|^2 \end{aligned}$$

Comme tout est positif, on peut prendre la racine carrée (et par commutativité dans $\mathbb{R}$) : *(/2)*

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{H}, \qquad |zz'| = |z| \times |z'| = |z'| \times |z| = |z'z|}$$

3. Inversibilité.
   On dit que $z \in \mathbb{H}$ est inversible, si il existe $z' \in \mathbb{H}$ tel que $zz' = z'z = 1$
   (a) On a vu que pour tout $z \in \mathbb{H}$, $z\overline{z} = \overline{z}z = |z|^2$.
   Si $z = 0$,
   alors pour tout $z' \in \mathbb{H}$, $zz' = 0 \times z' = 0$,
   donc z n'est pas inversible.
   Et si $z \neq 0$, alors $|z|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$,
   et donc en prenant $z' = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$, on a $zz' = z'z = 1$.
   Donc z est inversible. */1,5*

$$\boxed{z \text{ est inversible dans } \mathbb{H} \Longleftrightarrow z \neq 0}$$

   (b) Supposons que z soit inversible d'inverse z_1 et z_2.
   Alors par associativité :

$$z_1 = z_1 \times 1 = z_1 \times (z \times z_2) = (z_1 \times z) \times z_2 = 1 \times z_2 = z_2$$

   Donc */1,5*

$$\boxed{\text{si } z \text{ est inversible, alors son inverse est unique.}}$$

   Et on a vu, pour $z = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$, */0,5*

$$\boxed{z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k})}$$

   (c) On applique la formule (avec $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ et $d = 0$), on trouve $\mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$ Et de même pour tous : */1*

$$\boxed{\mathrm{i}^{-1} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{j}^{-1} = -\mathrm{j} \quad \text{ et } \mathrm{k}^{-1} = -\mathrm{k}}$$

4. Expression trigonométrique.

$$|(\cos\alpha + \sin\alpha\mathrm{i}) \times (\cos\beta + \sin\beta\mathrm{j})|^2 = |(\cos\alpha + \sin\alpha\mathrm{i})|^2 |(\cos\beta + \sin\beta\mathrm{j})|^2 = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = 1$$

   On a l'implication *0,5*

$$\boxed{\exists\ (\alpha, \beta) \in [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[\text{ tel que } z = (\cos\alpha + \sin\alpha\mathrm{i}) \times (\cos\beta + \sin\beta\mathrm{j}) \Longrightarrow |z| = 1}$$

   Piste de recherche...
   Commençons par analyser la situation.
   Réciproquement, soit $z = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in \mathbb{H}$ tel que $|z| = 1$.
   Alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |z|^2 = 1$,
   ainsi il existe un unique $\beta \in [0, 2\pi[$ tel que $\cos^2\beta = a^2 + b^2$ et $\sin^2\beta = c^2 + d^2$.
   Puis on a envie de prendre $\cos\alpha = \frac{a}{\cos\beta}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{\cos\beta}$.
   Mais cela n'assure pas la même chose pour $c = \cos\alpha\sin\beta$ et $d = \sin\alpha\sin\beta$.
   La réciproque semble donc fausse. On peut prendre comme contre exemple $a = d$ et $b = c = 0$.

   Soit $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{k}$. On a donc $|z|^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$, donc $|z| = 1$.
   Supposons que $z = (\cos\alpha + \sin\alpha\mathrm{i}) \times (\cos\beta + \sin\beta\mathrm{j})$.
   On a alors $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{k} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cos\beta\mathrm{i} + \cos\alpha\sin\beta\mathrm{j} + \sin\alpha\sin\beta\mathrm{k}$.
   On peut identifier.
   On a alors $\sin\alpha\cos\beta \times \cos\alpha\sin\beta = 0 = \cos\alpha\cos\beta \times \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}$.
   C'est contradictoire. */1,5*

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse}}$$

B. Entiers de $\mathbb{H}$

1. Soient $z, z' \in \mathbb{O}$ Il existe $\epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\}$ tel que
   $z = (a + \epsilon\frac{1}{2}) + (b + \epsilon\frac{1}{2})\mathrm{i} + (c + \epsilon\frac{1}{2})\mathrm{j} + (d + \epsilon\frac{1}{2})\mathrm{k}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,
   et $z' = (a' + \epsilon'\frac{1}{2}) + (b' + \epsilon'\frac{1}{2})\mathrm{i} + (c' + \epsilon'\frac{1}{2})\mathrm{j} + (d' + \epsilon'\frac{1}{2})\mathrm{k}$, avec $a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} zz' = \ & (aa' + -bb' - cc' - dd') + (ab' + a'b + cd' - c'd)\mathrm{i} + (ac' + a'c + db' - d'b)\mathrm{j} + (ad' + a'd + bc' - b'c)\mathrm{k} \\ & + \tfrac{\epsilon}{2}(a' - b' - c' - d') + (b' + a' + d' - c')\mathrm{i} + (c' + a' + b' - d')\mathrm{j} + (d' + a' + c' - b')\mathrm{k} \\ & + \tfrac{\epsilon'}{2}(a - b - c - d) + (b + a + d - c)\mathrm{i} + (c + a + b - d)\mathrm{j} + (d + a + c - b)\mathrm{k} \\ & + \tfrac{\epsilon\epsilon'}{4}(-2) + (2)\mathrm{i} + (2)\mathrm{j} + (2)\mathrm{k} \end{aligned}$$

/1

   Par ailleurs, comme $(a - b - c - d) + (b + a + d - c) = 2(a - c)$, nombre pair,
   donc $(a - b - c - d)$ et $(b + a + d - c)$ ont même parité.

De même $(a-b-c-d)$, $(b+a+d-c)$, $(c+a+b-d)$ et $(d+a+c-b)$ ont même parité.
Et $(a'-b'-c'-d')$, $(b'+a'+d'-c')$, $(c'+a'+b'-d')$ et $(d'+a'+c'-b')$ ont même parité.
Ainsi, les nombres additionnés sont soit des entiers, soit des demi-entiers mais tout ensemble sur $(1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})$.
Par conséquent, /1,5

$$\boxed{\text{Si } z,z'\in\mathbb{O}, \text{ alors } z\times z'\in\mathbb{O}.}$$

Soit $z\in\mathbb{O}$, alors :
- si $z=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$, avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$,
  $|z|^2=a^2+b^2+c^2+d^2\in\mathbb{N}$
- si $z=(a+\frac{1}{2})+(b+\frac{1}{2})\mathrm{i}+(c+\frac{1}{2})\mathrm{j}+(d+\frac{1}{2})\mathrm{k}$, avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$,
  $|z|^2=a^2+2a+b^2+2b+c^2+2c+d^2+2d+1\in\mathbb{N}$ /1

$$\boxed{\text{si } z\in\mathbb{O} \text{ alors } |z|^2\in\mathbb{N}.}$$

2. Supposons que $z\in\mathbb{U}$, alors $z\in\mathbb{O}$ et donc $|z|^2\in\mathbb{N}$.
   de même $z^{-1}\in\mathbb{U}$, donc $|z^{-1}|^2\in\mathbb{N}$.
   Or $|z|^2\times|z^{-1}|^2=|zz^{-1}|^2=|1|^2=1$.
   Donc $|z|^2$ est un nombre entier naturel qui admet un nombre inverse entier naturel.
   Le seul nombre qui vérifie cette propriété est 1 : $|z|^2=1$ ainsi $|z|=1$. /1,5

$$\boxed{\text{si } z\in\mathbb{U} \text{ alors } |z|=1}$$

3. Soit $z=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}\in\mathbb{U}$ alors $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.
   Supposons que z est un entier exact (pas de $\frac{1}{2}$),
   donc un des quatre nombres vaut 1 ou -1, les autres sont nuls.
   On trouve dans ce cas 8 nombres : ±1, $\pm\mathrm{i}$, $\pm\mathrm{j}$ et $\pm\mathrm{k}$. /1
   Réciproquement : ces 8 nombres sont bien des éléments de $\mathbb{U}$.
   Supposons que z entier non exact : $z=A+\frac{1}{2}+(B+\frac{1}{2})\mathrm{i}+(C+\frac{1}{2})\mathrm{j}+(D+\frac{1}{2})\mathrm{k}$ avec $A,B,C,D\in\mathbb{Z}$.
   Nécessairement (on multiplie par 4) : $(2A+1)^2+(2B+1)^2+(2C+1)^2+(2D+1)^2=4$.
   Or la somme de 4 entiers au carré donne 4 ssi il s'agit de $2^2+0^2+0^2+0^2$ ou de $1^2+1^2+1^2+1^2$.
   Premier cas : supposons que l'un des nombres $2A+1\ldots$vaut ±2 et les autres son nuls.
   Alors, sans perte de généralité, on peut supposer $2A+1=\pm2$, i.e. $A=\frac{1}{2}$ ou $A=-\frac{3}{2}$.
   Ceci est impossible car A est un entier. Donc ce premier cas ne se produit pas.
   Second cas : supposons que l'on ait : $2A+1=\pm1$, $\ldots 2D+1=\pm1$.
   Cela donne $A=0$ ou $A=-1$ et $B=0$ ou $B=-1\ldots D=0$ ou $D=-1$.
   Cela conduit donc à $2^4=16$ nombres distincts.
   Et réciproquement, pour chacun de ces 16 nombres de $\mathbb{O}$:
   $z=A+\frac{1}{2}+(B+\frac{1}{2})\mathrm{i}+(C+\frac{1}{2})\mathrm{j}+(D+\frac{1}{2})\mathrm{k}$ avec $A,B,C,D\in\{-1,0\}$, on trouve $|z|=1$. /2

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc } \mathbb{U} \text{ a 24 éléments,}\\ \mathbb{U}=\left\{a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}\mid a,b,c,d=\pm1\right\}\cup\left\{A+\frac{1}{2}+(B+\frac{1}{2})\mathrm{i}+(C+\frac{1}{2})\mathrm{j}+(D+\frac{1}{2})\mathrm{k}\mid A,B,C,D\in\{-1,0\}\right\}\end{array}}$$

4. Un nombre qui n'est pas premier dans $\mathbb{Z}$ ne peut pas être premier dans $\mathbb{H}$
   (on utilise la même décomposition que dans $\mathbb{Z}$, par exemple : $8=2\times4\ldots$).
   $2=(1+\mathrm{i})\times(1-\mathrm{i})$ avec $(1+\mathrm{i}),(1-\mathrm{i})\notin\mathbb{U}$, donc 2 n'est pas premier.
   $3=(1+\mathrm{i}+\mathrm{j})\times(1-\mathrm{i}-\mathrm{j})$ avec $(1+\mathrm{i}+\mathrm{j}),(1-\mathrm{i}-\mathrm{j})\notin\mathbb{U}$, donc 3 n'est pas premier.
   $5=(2+\mathrm{i})\times(2-\mathrm{i})$ avec $(2+\mathrm{i}),(2-\mathrm{i})\notin\mathbb{U}$, donc 5 n'est pas premier.
   $7=(2+\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k})\times(2-\mathrm{i}-\mathrm{j}-\mathrm{k})$ avec $(2+\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}),(2-\mathrm{i}-\mathrm{j}-\mathrm{k})\notin\mathbb{U}$, donc 7 n'est pas premier.
   $11=(3+\mathrm{i}+\mathrm{j})\times(3-\mathrm{i}-\mathrm{j})$ avec $(3+\mathrm{i}+\mathrm{j}),(3-\mathrm{i}-\mathrm{j})\notin\mathbb{U}$, donc 11 n'est pas premier.
   $13=(2+2\mathrm{i}+2\mathrm{j}+\mathrm{k})\times(2-2\mathrm{i}-2\mathrm{j}-\mathrm{k})$ avec $(2+2\mathrm{i}+2\mathrm{j}+\mathrm{k}),(2-2\mathrm{i}-2\mathrm{j}-\mathrm{k})\notin\mathbb{U}$,
   donc 13 n'est pas premier.
   $19=(3+3\mathrm{i}+\mathrm{j})\times(3-3\mathrm{i}-\mathrm{j})$ avec $(3+3\mathrm{i}+\mathrm{j}),(3-3\mathrm{i}-\mathrm{j})\notin\mathbb{U}$, donc 19 n'est pas premier. /1,5

$$\boxed{\text{Donc les nombres 2, 3, 4,}\ldots\text{20 ne sont pas premiers dans } \mathbb{O}.}$$

5. On exploite le calcul vu plus haut (en A.2.(b)) : $|zz'|=|z|\times|z'|$.
   Donc avec $z=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ et $z'=a'+b'\mathrm{i}+c'\mathrm{j}+d'\mathrm{k}$,
   $$nn'=|z|^2\times|z'|^2=|zz'|^2=(aa'-bb'-cc'-dd')^2+(ab'+a'b+cd'-c'd)^2+(ac'+a'c+db'-d'b)^2+(ad'+a'd+bc'-b'c)^2$$
   Ces quatre nombres sont bien des entiers relatifs (addition et produit d'entier). En prenant les valeurs absolues, on obtient des entiers naturels. /1

$$\boxed{\begin{array}{c}(a^2+b^2+c^2+d^2)\times(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)\\ =|aa'-bb'-cc'-dd'|^2+|ab'+a'b+cd'-c'd|^2+|ac'+a'c+db'-d'b|^2+|ad'+a'd+bc'-b'c|^2\end{array}}$$

Exercice 3

A. Fonctions auxiliaires

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par la relation $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   On considère l'équation $(E_a) : g(x) = a$ (où l'inconnue x appartient à $]0;+\infty[$).

   (a) g est la division de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g est dérivable sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}+^*$.

   Et $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \dfrac{x \times \frac{1}{x} - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

   On fait un tableau de signes et variations :

x	0		e		$+\infty$
$1 - \ln x$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

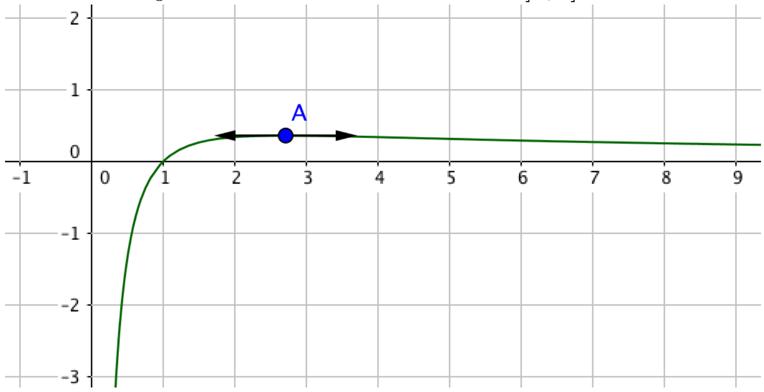
$g(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$

(croissance comparée)

La fonction g est strictement croissante sur $]0; e]$ et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$. /2



/1

   (b) On suppose que : $0 < a < \frac{1}{e}$.

   Le tableau de variations nous assure :

   — g est continue, strictement croissante de $]0, e[$ sur $] - \infty, e^{-1}[$,
   donc elle établit une bijection de $]0, e[$ sur $] - \infty, e^{-1}[$.
   De plus $a \in]0, 1/e[\subset] - \infty, e^{-1}[$, donc a admet un unique antécédent par g sur $]0, e[$.

   — g est continue, strictement décroissante de $]e, +\infty[$ sur $]0, e^{-1}[$,
   donc elle établit une bijection de $]e, +\infty[$ sur $]0, e^{-1}[$.
   De plus $a \in]0, 1/e[=]0, e^{-1}[$, donc a admet un unique antécédent par g sur $]e, +\infty[$. /1,5

   Et donc

$$\boxed{(E_a) \text{ admet exactement deux solutions; notées } u(a) \text{ et } v(a) \text{ avec } 0 < u(a) < e < v(a).}$$

   De plus $g(1) = 0$, donc $g(a) < g(u(a)) < 1/e$, par croissance de g sur $]0, e[$: /0,5

$$\boxed{1 < u(a) < e.}$$

   (c) Une étude comparable donne (rappelons que $a > 0$, par hypothèse) :
   — si $0 < a < 1/e$, alors (E_a) possède deux solutions $u(a)$ et $v(a)$, vus plus haut.
   — si $a = 1/e$, alors (E_a) admet une unique solution : $x = e$.
   — si $a > 1/e$, alors (E_a) n'admet aucune solution /1

2. Soit h_a la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par la relation : $h_a(x) = 2\ln x + \ln a - ax$.
   On considère l'équation $(F_a) : h_a(x) = 0$ (où l'inconnue x appartient à $]0;+\infty[$)

   (a) h_a est la somme de fonctions usuelles, elle est donc dérivable sur $]0;+\infty[$.

   $\forall\, x > 0$, $h_a'(x) = \dfrac{2}{x} - a = \dfrac{2 - ax}{x}$.

   On fait un tableau de signes et variations :

x	0		$2/a$		$+\infty$
$2 - ax$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$h_a'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 4 - \ln a - 2$	$\searrow$	$-\infty$

$h_a(2/a) = 2\ln 2 - 2\ln a - \ln a - 2 = \ln 4 - \ln a - 2$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ /2

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ (car $a > 0$)

(croissance comparée)

Donc

$$\boxed{\begin{array}{c} h_a \text{ est strictement croissante de }]0, 2/a] \text{ sur }]-\infty; \ln 4 - \ln a - 2[\\ \text{et strictement décroissante de }]2/a, +\infty] \text{ sur }]-\infty; \ln 4 - \ln a - 2[\end{array}}$$

(b) On suppose que : $0 < a < \frac{4}{e^2}$.
Alors cela signifie que $\ln 4 - \ln a - 2 > \ln 4 - (\ln 4 - \ln e^2) - 2 = 2 - 2 = 0$.
Ainsi, $\ln 4 - \ln a - 2 > 0$.
Comme h_a est continue et strictement croissante de $]0, 2/a]$ sur $]-\infty; \ln 4 - \ln a - 2[$,
elle établit une bijection de $]0, 2/a]$ sur $]-\infty; \ln 4 - \ln a - 2[$;
et comme $0 \in]-\infty; \ln 4 - \ln a - 2[$—, il admet un unique antécédent par h_a sur $]0, 2/a]$.
Ainsi

$$\boxed{F_a \text{ a une unique solution sur }]0, 2/a], \text{ notée } r(a).}$$

Comme h_a est continue et strictement décroissante de $]2/a, +\infty]$ sur $]-\infty; \ln 4 - \ln a - 2[$,
elle établit une bijection de $]2/a, +\infty]$ sur $]-\infty; \ln 4 - \ln a - 2[$;
et comme $0 \in]-\infty; \ln 4 - \ln a - 2[$, il admet un unique antécédent par h_a sur $]2/a, +\infty]$.
Ainsi

$$\boxed{F_a \text{ a une unique solution sur }]2/a, +\infty], \text{ notée } s(a).}$$

Par ailleurs : /2

$$\boxed{0 < r(a) < 2/a < s(a)}$$

compte-tenu des intervalles de définition.

(c) Une étude comparable donne (rappelons que $a > 0$, par hypothèse) :
— si $0 < a < 4/e^2$, alors (E_a) possède deux solutions $r(a)$ et $s(a)$, vus plus haut.
— si $a = 4/e^2$, alors $\ln 4 - \ln a - 2 = 0$ et (E_a) admet une unique solution : $x = 2/a$.
— si $a > 4/e^2$, alors $\ln 4 - \ln a - 2 < 0$ et (E_a) n'admet aucune solution /2

B. Étude de f_a

1. Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b$.
Soit $x > 0$. On fait une étude par morceaux
Alors $f_a(x) - \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = 1 - e^{-ax}$.
Or $a > 0$, $x > 0$, donc $-ax < 0$ et $e^{-ax} < 1$, donc $f_a(x) - \left(\frac{1}{x} - 1\right) > 0$.
Ainsi : $f_a(x) > \left(\frac{1}{x} - 1\right)$.
Alors $f_b(x) - f_a(x) = e^{-ax} - e^{-bx}$.
Or $0 < a < b$, $x > 0$, donc $-ax > -bx$ et $e^{-ax} > e^{-bx}$, donc $f_b(x) - f_a(x) > 0$.
Ainsi : $f_b(x) > f_a(x)$.
Alors $\dfrac{1}{x} - f_b(x) = e^{-bx} > 0$. Ainsi $\frac{1}{x} - f_b(x) > 0$ et $\frac{1}{x} > f_b(x)$. /1,5

$$\boxed{\text{Par conséquent : pour tout réel } x \in]0; +\infty[,\ \frac{1}{x} - 1 < f_a(x) < f_b(x) < \frac{1}{x}}$$

2. Il n'y a pas de formes indéterminées : /0,5

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f_a(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f_a(x) = 0}$$

3. Soit $x > 0$,
$f_a(x) > 0 \iff \frac{1}{x} > e^{-ax} \iff -\ln x > -ax$ (car ln est croissante). /1
$\iff a > \dfrac{\ln x}{x}$ (car $x > 0$) $\iff a - g(x) > 0$

$$\boxed{\text{Ainsi les signes de } f_a(x) \text{ et de } a - g_a(x) \text{ sont exactement les mêmes.}}$$

Trois cas sont possibles :
— si $0 < a < 1/e$, alors (E_a) possède deux solutions $u(a)$ et $v(a)$.

x	0		$u(a)$		$v(a)$		$+\infty$
$f_a(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x < u(a) \Leftrightarrow g(x) < a \Leftrightarrow a - g(x) > 0$
$u(a) < x < v(a) \Leftrightarrow g(x) > a \Leftrightarrow a - g(x) < 0$
$x > v(a) \Leftrightarrow g(x) < a \Leftrightarrow a - g(x) > 0$

— si $a = 1/e$, alors (E_a) admet une unique solution : $x = e$.

x	0		e		$+\infty$
$f_a(x)$		$+$	0	$+$	

$x \neq e \Leftrightarrow g(x) < a \Leftrightarrow a - g(x) > 0$
$x = e \Leftrightarrow g(x) = a \Leftrightarrow a - g(x) = 0$

— si $a > 1/e$, alors (E_a) n'admet aucune solution

x	0		$+\infty$
$f_a(x)$		$+$	

$g(x) < a \Leftrightarrow a - g(x) > 0$ /2

4. f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (somme de deux fonctions dérivables),
et $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + ae^{-ax}$. On procède par équivalences
Soit $x > 0$, $f_a(x) > 0 \iff ae^{-ax} > \frac{1}{x^2} \iff \ln(ae^{-ax}) > \ln(\frac{1}{x^2})$ (car ln est croissante).
$\iff \ln a + (-ax) > -2\ln x \iff 2\ln x + \ln a - ax > 0 \iff h_a(x) > 0$ /2

$$\boxed{\text{Ainsi les signes de } f_a'(x) \text{ et de } h_a(x) \text{ sont exactement les mêmes.}}$$

Trois cas sont possibles :
— si $0 < a < 4/e^2$, alors (E_a) possède deux solutions $r(a)$ et $s(a)$, vus plus haut.

x	0		$r(a)$		$s(a)$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_a(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

— si $a = 4/e^2$, alors $\ln 4 - \ln a - 2 = 0$ et (E_a) admet une unique solution : $x = 2/a$.

x	0		$2/a$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$-$	
$f_a(x)$		$\searrow$		$\searrow$	

— si $a > 4/e^2$, alors $\ln 4 - \ln a - 2 < 0$ et (E_a) n'admet aucune solution

x	0		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	
$f_a(x)$		$\searrow$	

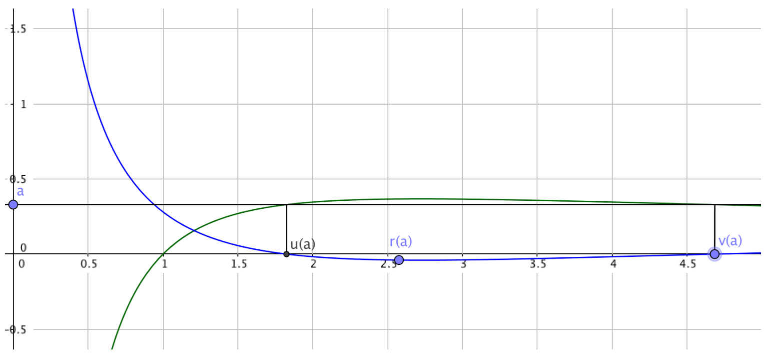
/2

5. On suppose dans cette question que $0 < a < \frac{1}{e}$ Et donc $a < \frac{4}{e^2}$, car $\frac{1}{e} < \frac{4}{e^2}$, puisque $e < 4$.
   (a) On est donc dans la situation de l'existence des points $u(a)$, $v(a)$, $r(a)$ et $s(a)$.
   Si $u(a) \geqslant r(a)$, alors cela signifie que $f\big(r(a)\big) > 0$ et f est positive sur un intervalle de la forme $]0, u(a)[$ avec $u(a) > r(a)$, mais vues les variations de f_a cela impose aussi que $u(a) > s(a)$, et f_a ne peut pas s'annuler en $v(a)$. Nous avons une contradiction, donc $u(a) < r(a)$.
   En réitérant ce même genre de raisonnement, nous obtenons : /2

$$\boxed{u(a) < r(a) < v(a) < s(a).}$$

   Les variations de f_a montre que /1

$$\boxed{\text{cette fonction présente un minimum (local) en } r(a) \text{, négatif.}}$$



   (b) /2

   (c) Nous savons que $h_a\big(r(a)\big) = 0$, donc $2\ln(r(a)) + \ln a - ar(a) = 0$, $\ln(r(a)) = \dfrac{1}{2}ar(a) - \ln\sqrt{a}$,
   et donc en composant avec l'exponentielle : /1,5

$$\boxed{r(a) = \frac{e^{ar(a)/2}}{\sqrt{a}}.}$$

   (d) D'après la question précédente, $ar(a) = a\dfrac{e^{ar(a)/2}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}e^{ar(a)/2}$.
   Or nous savons que $0 < r(a) < \dfrac{2}{a}$, donc $0 < \dfrac{ar(a)}{2} < 1$ et donc $\sqrt{a}e^0 < \sqrt{a}e^{ar(a)/2} < \sqrt{a}e^1$.
   En passant à la limite $\sqrt{a}$ tend vers 0 et donc /2

$$\boxed{\lim_{a\to 0} \sqrt{a}r(a) = 0}$$

   (e) $m(a) = f_a(r(a)) = \dfrac{1}{r(a)} - e^{-ar(a)} = \sqrt{a}e^{-ar(a)/2} - e^{-ar(a)}$,
   par composition des limites, comme $\lim\limits_{a\to 0} ar(a) = 0$, alors $\lim\limits_{a\to 0} e^{-ar(a)} = e^0 = 1$, /1,5

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{a\to 0} m(a) = 0 - 1 = -1.}$$