Devoir surveillé n°2

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et d'un probléme.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice 1 - Inégalités

Dans cet exercice, nous cherchons à encadrer

$$xy + yz + zx - 2xyz$$

sous la contrainte $x + y + z = 1$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}_+$.
On commence par démontrer l'inégalité artithmético-géométrique :

$$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}_+, \qquad \sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3} \qquad (IAG_3)$$

puis l'inégalité géométrico-harmonique :

$$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leqslant \sqrt[3]{xyz} \qquad (IGH_3)$$

1. Deux démonstrations différentes de (IAG_3). Cas d'égalité. Puis (IGH_3)
   (a) Première démonstration.
   Vérifier que pour tous nombres a, b et c :
   $$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$
   En déduire que pour tous nombres réels positifs x, y et z, l'inégalité (IAG_3).
   (b) Seconde démonstration.
   On fixe $y, z \in \mathbb{R}_+$ et on considère $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x+y+z)^3 - 27xyz$.
   Etudier les variations de φ et en déduire l'inégalité (IAG_3)
   (c) Quels sont tous les cas, qui conduisent à une égalité dans l'inégalité (IAG_3) ?
   (d) En prenant $X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{1}{y}$ et $Z = \frac{1}{z}$, montrer que :
   $$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leqslant \sqrt[3]{xyz} \qquad (IGH_3)$$
2. Application. On fixe $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\underline{x + y + z = 1}$.
   (a) Minoration.
   En combinant les inégalités (IGH_3) et (IAG_3), montrer que $xy + yz + xz - 2xyz \geqslant 0$.
   On pourra factoriser par xyz
   (b) Majoration.
   Développer : $(1-2x)(1-2y)(1-2z)$, en déduire que :
   $$xy + yz + xz - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}$$
   On fera bien attention aux signes de $(1-2x)$, $(1-2y)$ et $(1-2z)$ si on applique IAG_3.
   (c) Les encadrements obtenus aux questions précédentes sont-ils optimaux ?

Exercice 2 - Ensemble des quaternions

A l'image de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes obtenu à partir de $\mathbb{R}^2$ et d'une loi de multiplication particulière, on définit $\mathbb{H}$ l'ensemble des quaternions par :

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$$

avec les règles opératoires suivantes pour $z = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ et $z' = a' + b'\mathrm{i} + c'\mathrm{j} + d'\mathrm{k} \in \mathbb{H}$:

$$\begin{cases} z + z' = (a + a') + (b + b')\mathrm{i} + (c + c')\mathrm{j} + (d + d')\mathrm{k} \\ z \times z' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + a'b + cd' - c'd)\mathrm{i} + (ac' + a'c + db' - d'b)\mathrm{j} + (ad' + a'd + bc' - b'c)\mathrm{k} \end{cases}$$

Par la suite, on pourra écrire zz' au lieu de $z \times z'$

On admet que l'écriture des éléments de $\mathbb{H}$ de cette façon : $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ est unique (écriture dite *algèbrique*). Cela signifie qu'on peut identifier :

$$z = z' \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \end{cases}$$

A. Structure de $\mathbb{H}$

1. (a) On dit que $(E, \star)$ est commutatif (pour l'opération $\star$) si $\forall\ x, y \in E, x \star y = y \star x$.
   Montrer que $(\mathbb{H}, +)$ est commutatif et que $(\mathbb{H}, \times)$ n'est pas commutatif.

On admet que $(\mathbb{H}, +)$ est associatif : $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ noté $z_1 + z_2 + z_3$

On admet que $(\mathbb{H}, \times)$ est associatif : $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}, (z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$ noté $z_1 \times z_2 \times z_3$.

On admet que $\times$ est distributive sur $+$: $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}, (z_1 + z_2) \times z_3 = z_1 \times z_3 + z_2 \times z_3$.

   (b) Soit $z \in \mathbb{H}$. Calculer $z + \mathrm{i}z\mathrm{i} + \mathrm{j}z\mathrm{j} + \mathrm{k}z\mathrm{k}$.

2. Conjugaison et module.
   On considère l'application conjugué de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ définie par :
   $$z \mapsto \overline{z} = \overline{(a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k})} = a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}$$
   (a) Montrer que si $z \in \mathbb{H}$, alors $z \times \overline{z} = \overline{z} \times z \in \mathbb{R}_+$.
   (b) On note $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.
   Montrer que $|\overline{z}| = |z|$ et $|zz'| = |z| \times |z'| = |z'z|$
3. Inversibilité.
   On dit que $z \in \mathbb{H}$ est inversible, si il existe $z' \in \mathbb{H}$ tel que $zz' = z'z = 1$
   (a) Montrer que :
   $$z \text{ est inversible dans } \mathbb{H} \Longleftrightarrow z \neq 0$$
   (b) Montrer que dans ce cas z admet un unique inverse, on le note z^{-1}.
   Donner alors une expression algébrique de z^{-1} en fonction de celle de z.
   (c) Que vaut i^{-1}, j^{-1} et k^{-1}
4. Expression trigonométrique.
   Montrer l'implication :
   $$\exists\ (\alpha, \beta) \in [0, 2\pi[\times[0, 2\pi[\text{ tel que } z = (\cos\alpha + \sin\alpha\mathrm{i}) \times (\cos\beta + \sin\beta\mathrm{j}) \Longrightarrow |z| = 1$$
   La réciproque est-elle vraie ?

B. Entiers de $\mathbb{H}$

Soit $z = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in \mathbb{H}$.

On dit que z est entier dans $\mathbb{H}$ si $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ ou $(a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}, c - \frac{1}{2}, d - \frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}^4$

On note $\mathbb{O}$ l'ensemble des entiers de $\mathbb{H}$.

1. Montrer que si $z, z' \in \mathbb{O}$, alors $z \times z' \in \mathbb{O}$ et que si $z \in \mathbb{O}$ alors $|z|^2 \in \mathbb{N}$.
2. Un élément z de $\mathbb{H}$ est appelé une unité si z et z^{-1} sont tous les deux des entiers de $\mathbb{H}$.
   On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des unités de $\mathbb{H}$. Montrer que si $z \in \mathbb{U}$ alors $|z| = 1$.
3. En déduire que $\mathbb{U}$ a 24 éléments.

On dit qu'un entier $z \in \mathbb{O}$ est premier si

$$z = uv \text{ avec } u, v \in \mathbb{O} \Longrightarrow u \text{ ou } v \in \mathbb{U}$$

4. Montrer que les nombres 2, 3, 4,. . .20 ne sont pas premiers dans $\mathbb{O}$.
5. Soit $a, b, c, d, a', b', c', d'$ huit entiers naturels, et $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, $n' = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2$.
   En utilisant le module des quaternions, démontrer que le produit nn' est la somme de quatre carrés d'entiers naturels.

Exercice 3 - Etude d'une fonction à paramètre

Dans tout le problème, a désigne un nombre réel **strictement positif**.
On définie dans tout l'exercice la fonction f_a définie sur $]0;+\infty[$ par $f_a(x) = \dfrac{1}{x} - e^{-ax}$

A. Fonctions auxiliaires

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par la relation $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   On considère l'équation (E_a) : $g(x) = a$ (où l'inconnue x appartient à $]0;+\infty[$).
   (a) Etudier la variation de la fonction g et faire la représentation graphique de g.
   (b) On suppose que : $0 < a < \frac{1}{e}$.
   Montrer que (E_a) admet exactement deux solutions ; notées $u(a)$ et $v(a)$ avec $u(a) < v(a)$.
   Etablir que : $1 < u(a) < e < v(a)$.
   (c) Discuter suivant les valeurs de a le nombre de solutions de (E_a).
2. Soit h_a la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par la relation : $h_a(x) = 2\ln x + \ln a - ax$.
   On considère l'équation (F_a) : $h_a(x) = 0$ (où l'inconnue x appartient à $]0;+\infty[$)
   (a) Etudier la variation de la fonction h_a (on ne demande pas la représentation graphique)
   (b) On suppose que : $0 < a < \frac{4}{e^2}$.
   Montrer que (F_a) admet exactement deux solutions ; notées $r(a)$ et $s(a)$ avec $r(a) < s(a)$.
   Etablir que : $0 < r(a) < \frac{2}{a} < s(a)$.
   (c) Discuter suivant les valeurs de a le nombre de solutions de (F_a).

B. Etude de f_a

1. Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b$.
   Montrer que pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $\dfrac{1}{x} - 1 < f_a(x) < f_b(x) < \dfrac{1}{x}$
2. Calculer la limite de f_a lorsque x tend vers 0.
   Calculer la limite de f_a lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Comparer les signes de $f_a(x)$ et de $a - g_a(x)$.
   En déduire le tableau de signes de $f_a(x)$ lorsque x décrit $]0;+\infty[$, a étant fixé.
   (On sera amener à distinguer trois cas suivant la position de a par rapport à $1/e$.)
4. Comparer les signes de $f_a'(x)$ et de $h_a(x)$.
   Dresser le tableau de variation de f_a. On distinguera deux cas : $a \geqslant \frac{4}{e^2}$ et $0 < a < \frac{4}{e^2}$.
   (Dans ce dernier cas, on ne cherchera pas à préciser les valeurs de $f_a\big(r(a)\big)$ et de $f_a\big(s(a)\big)$.)
5. On suppose dans cette question que $0 < a < \frac{1}{e}$.
   (a) Etablir que $u(a) < r(a) < v(a) < s(a)$ et que f_a présente un minimum en $r(a)$.
   On note $m(a) = f_a\big(r(a)\big)$
   (b) Donner l'allure du graphe de f_a.
   (c) Etablir que $r(a) = \dfrac{e^{ar(a)/2}}{\sqrt{a}}$.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{a\to 0} \sqrt{a}r(a)$.
   (On pourra écrire $ar(a) = \sqrt{a}e^{ar(a)/2}$ et utiliser la question A. 2.(b).)
   (e) Déterminer $\lim\limits_{a\to 0} m(a)$.