Devoir à la maison n°5

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Exercice 1 - Nombres parfaits

Pour tout entier $n > 0$, on note $s(n)$, la somme de tous les diviseurs positifs de n :

$$s(n) = \sum_{k|n} k$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Si $a \wedge b = 1$, montrer que $s(ab) = s(a)s(b)$.
2. Soit p un nombre premier tel que $M_p = 2^p - 1$ soit premier.
   On pose $N = 2^{p-1} M_p$. Vérifier que $s(N) = 2N$.
3. Réciproquement, soit $N > 0$, un entier pair tel que $s(N) = 2N$ (nombre parfait).
   (a) On écrit $N = 2^r m$ où m est un entier impair et $r \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer qu'il existe un entier t tel que $m = (2^{r+1} - 1)t$ et $s(m) = 2^{r+1}t$.
   (b) Prouver ensuite que $t = 1$ et que $p = r + 1$ est premier ainsi que $M_p = m$.
   (c) Quelle est la conclusion ?

Exercice 2 - Formule de Legendre

Soient $n \geqslant 1$ et p un nombre premier. On se propose de calculer $m = v_p(n!)$.
On suppose que n s'écrit en base p,

$$n = a_r p^r + a_{r-1} p^{r-1} + \cdots + a_1 p + a_0 \qquad a_r \neq 0, \quad a_r, a_{r-1}, \ldots a_0 \in \{0, 1, \ldots p-1\}$$

1. Soit $k \in \{0, 1, \ldots r\}$. Quel (double) calcul faire pour obtenir la valeur de a_k, sans calculer les autres valeurs ?
2. Démontrer la formule suivante :
$$m = \sum_{k=1}^{r} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$
3. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Calculer $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ en fonction des chiffres a_i.
4. En déduire la formule de Legendre :
$$m = \frac{n - S}{p - 1}, \qquad S := \sum_{k=0}^{r} a_k$$
5. Calculer m lorsque $n = 1\,000$ et $p = 2$.

Exercice 3 - Formule de Legendre

1. Montrer à l'aide du procédé de dichotomie que pour tout couple (a, b) de réels vérifiant $a < b$ et toute fonction φ dérivable sur $[a, b]$ vérifiant $\varphi(b) > \varphi(a)$, il existe au moins un réel $\ell \in [a, b]$ vérifiant $\varphi(\ell) = \varphi(a)$ et $\varphi'(\ell) \geqslant 0$.
2. En déduire que les fonctions constantes sur un intervalle sont les seules à posséder une fonction dérivée nulle.
3. Montrer que les fonctions croissantes (respectivement décroissantes) sur un intervalle sont les seules à posséder une fonction dérivée positive ou nulle (resp. négative ou nulle).