Devoir surveillé n°4
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrement) selon la qualité des copies.
Nous soulignons dans la correction, les arguments à écrire absolument !

Exercice - (Une) Suite de Ramanujan

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note

$$u_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots + (n-1)\sqrt{1+n}}}} \qquad \text{et} \qquad f_n(t) = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots + (n-1)\sqrt{1+nt}}}}$$

1. Il suffit de <u>calculer</u> (mais il faut bien comprendre l'énoncé) : */1*

$$\boxed{u_2 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \qquad u_3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1+3}} = \sqrt{1 + 2 \times 2} = \sqrt{5}}$$

2. Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, la fonction $\varphi_k : t \mapsto \sqrt{1 + kt}$ est <u>croissante</u> (par composition) sur $\mathbb{R}_+$ et <u>à valeurs dans $\mathbb{R}_+$</u> (L'intervalle image est important pour la composition).
Donc <u>par composition</u> de fonctions croissantes : $\varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \cdots \circ \varphi_n$ est également croissante. */1,5*

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \qquad f_n \text{ est croissante.}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

(a) $f_n(1) = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots + (n-1)\sqrt{1 + n \times 1}}}} = u_n$

$$f_n(\sqrt{1 + (n+1)}) = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots + (n-1)\sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)}}}}} = u_{n+1}.$$ */1,5*

$$\boxed{\text{Avec } a_n = 1 > 0 \text{ et } b_n = \sqrt{1 + (n+1)} > 0, \text{ on a } u_n = f_n(a_n) \text{ et } u_{n+1} = f_n(b_n).}$$

(b) Comme <u>$a_n < b_n$</u>, puisque $n \geqslant 2$, et que <u>f_n est croissante</u> : $u_n \leqslant u_{n+1}$ */1,5*

$$\boxed{\text{Donc la suite } (u_n)_{n \geqslant 2} \text{ est une suite croissante.}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $c_n = (n+2)$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\underline{f_{n+1}(t)} = \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \cdots \circ \varphi_n \circ \varphi_{n+1}(t) = \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \cdots \circ \varphi_n\,(\varphi_{n+1}(t)) = \underline{f_n\big(\phi_{n+1}(t)\big)}$$

Or

$$\underline{\varphi_{n+1}(c_{n+1})} = \varphi_{n+1}((n+3)) = \sqrt{1 + (n+1)(n+3)} = \sqrt{n^2 + 4n + 4} = \sqrt{(n+2)^2} = (n+2)\underline{= c_n}$$

Donc

$$f_{n+1}(c_{n+1}) = f_n(\varphi_{n+1}(c_{n+1})) = f_n(n+2) = f_n(c_n)$$

Ainsi la suite $(f_n(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante : */2*

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(c_{n+1}) = f_n(c_n)\underline{= f_2(c_2) = \sqrt{1 + 2 \times 4} = \sqrt{9} = 3}}$$

(d) Enfin, comme <u>f_n est croissante</u>, on a pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n = f_n(a_n) = \underline{f_n(1) \leqslant f_n(c_n)} = 3$$

Donc la suite <u>(u_n) est majorée</u>. Comme elle est également <u>croissante</u> : */2*

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geqslant 2} \text{ est convergente.}}$$

4. Soit $\epsilon > 0$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Pour tout $t \in]-\frac{1}{k}, +\infty[$ et $u \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi_k(t) = u \Longleftrightarrow 1 + tk = u^2 \Longleftrightarrow t = \frac{u^2-1}{k}$$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc } \varphi_k \text{ admet une application réciproque : } \underline{\psi_k : \mathbb{R}_+ \to]-\tfrac{1}{k}, +\infty[, u \mapsto \frac{u^2-1}{k}}}$$

$$\boxed{\text{Comme } \varphi_k, \underline{\psi_k \text{ est croissante}} \text{ (sur } \mathbb{R}_+)}$$

/0,5

(b) Soit $e > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

$$\underline{\psi_k((k+1)-e) =}\frac{((k+1)-e)^2-1}{k} = \frac{k^2+2k-2(k+1)e+e^2}{k} \underline{= (k+2) - 2\frac{(k+1)}{k}e + \frac{e^2}{k}}$$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc } \psi_k((k+1)-e) \geqslant (k+2) - 2\tfrac{k+1}{k}e, \text{ car } \frac{e^2}{k} > 0}$$

(c) On peut faire une récurrence, ou remarquer que , pour tout $k \geqslant 3$:

$$\frac{\epsilon_k}{\epsilon_2} = \prod_{i=2}^{k-1} \frac{\epsilon_{i+1}}{\epsilon_i} = \prod_{i=2}^{k-1} 2\frac{i+1}{i} = 2^{k-1-2+1}\frac{k!}{2}\frac{1}{(k-1)!} = 2^{k-2}k$$

/1,5

$$\boxed{\forall\ k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, \qquad \epsilon_k = 2^{k-2}k\epsilon}$$

$(k+1) - \epsilon_k \underline{= k(\frac{(k+1)}{k} - 2^{k-2}\epsilon)}$. Or $\frac{(k+1)}{k} \to 1$, $2^{k-2}\epsilon \to +\infty$, donc $\frac{(k+1)}{k} - 2^{k-2}\epsilon \to -\infty$. /1,5

$$\boxed{\text{Par } \underline{\text{produit}} \lim_k (k+1) - \epsilon_k = -\infty \text{ et évidemment } \lim_k(\epsilon_k) = +\infty}$$

(d) On raisonne par équivalence. Comme les fonctions ψ_k sont croissantes, en composant :

$$\underline{u_n = f_n(1)} = \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \cdots \circ \varphi_n(1) \underline{\geqslant 3 - \epsilon \Longleftrightarrow 1 \geqslant \psi_n} \circ \psi_{n-1} \circ \cdots \psi_2(3-\epsilon)$$

En exploitant l'inégalité de la question (b), montrons <u>par récurrence</u> :

$$\mathcal{P}_n\ :\ \psi_n \circ \psi_{n-1} \circ \cdots \psi_2(3-\epsilon) \geqslant n + 2 - \epsilon_{n+1}$$

— Le résultat est vrai pour $n = 2$: $\psi_2(3-\epsilon) \geqslant 4 - 2\dfrac{3}{2}\epsilon = 4 - \epsilon_3$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Par croissance de ψ_{n+1} :

$$\psi_{n+1} \circ \psi_n \circ \psi_{n-1} \circ \cdots \psi_2(3-\epsilon) \geqslant \psi_{n+1}(n+2-\epsilon_{n+1})$$

$$\psi_{n+1} \circ \psi_n \circ \psi_{n-1} \circ \cdots \psi_2(3-\epsilon) \geqslant (n+3) - 2\frac{n+2}{n+1}\epsilon_{n+1} = (n+3) - \epsilon_{n+2} \qquad \text{(d'après (b))}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Puis $\lim_k (k+1) - \epsilon_k = -\infty$. Donc <u>il existe un rang K tel que $\forall\ k \geqslant K$, $(k+1) - \epsilon_k \leqslant 1$</u>. /3

$$\boxed{\text{Dans ce cas, pour tout } n \geqslant K, 1 \geqslant \psi_n \circ \psi_{n-1} \circ \cdots \psi_2(3-\epsilon) \Longrightarrow \underline{u_n \geqslant 3 - \epsilon}}$$

(e) On a donc une <u>suite croissante</u>, majorée par $\underline{3 = \sup\{u_n\}}$ /1,5

$$\boxed{\text{Donc } \lim(u_n) = 3}$$

Remarques !

Ramanujan est un brillant mathématicien indien (1887-1920). Son histoire est incroyable (je vous encourage à vous documenter)...ou à visionner <u>L'homme qui défiait l'infini</u>

Problème - Nombres constructibles

A. Sous-corps de $\mathbb{C}$

1. $1 \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}]^*$, donc $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ et $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]^*$ sont non vides.
   Soient $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.
   - Alors Re $(z - z') = a - a' \in \mathbb{Q}$ et Im $(z - z') = b - b' \in \mathbb{Q}$, car $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe.
     Donc $(\mathbb{Q}[i], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.
   - Puis $z \times (z')^{-1} = \dfrac{a + \mathrm{i}b}{a' + \mathrm{i}b'} = \dfrac{(a + \mathrm{i}b)(a' - \mathrm{i}b')}{(a')^2 + (b')^2}$ (avec $z, z' \neq 0$)
     Ainsi Re $(z \times (z')^{-1}) = \dfrac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} \in \mathbb{Q}$
     et Im $(z \times (z')^{-1}) = \dfrac{-ab' + ba'}{(a')^2 + (b')^2} \in \mathbb{Q}$ car $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps.
     Donc $(\mathbb{Q}[\mathrm{i}]^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. */2*

$$\boxed{\mathbb{Q}[\mathrm{i}] \text{ est un sous-corps de } \mathbb{C}.}$$

2. On suppose que $\mathbb{L}$ est un corps et que $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ sont deux sous-corps de $\mathbb{L}$.
   - Alors $(\mathbb{K}_1, +)$ et $(\mathbb{K}_2, +)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{L}, +)$.
     Et ainsi, par stabilité par intersection : $(\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2, +)$ est un sous-groupe de $\mathbb{L}$
   - Alors $(\mathbb{K}_1^*, \times)$ et $(\mathbb{K}_2^*, \times)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{L}^*, \times)$.
     Et ainsi, par stabilité par intersection : $(\mathbb{K}_1^* \cap \mathbb{K}_2^*, \times)$ est un sous-groupe de $\mathbb{L}$ */1*

$$\boxed{\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2 \text{ est un sous-corps de } \mathbb{L}.}$$

Si $(\mathbb{K}_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-corps de $\mathbb{L}$, alors $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \mathbb{K}_i$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$

3. Sous-corps engendré par une partie.
   Soit A une partie de $\mathbb{L}$. On note $E(A) = \{\mathbb{K} \mid \mathbb{K}, \text{ sous-corps de } \mathbb{L} \text{ tel que } A \subset \mathbb{K}\}$.
   (a) $A \subset \mathbb{L}$ et $\mathbb{L}$ est bien un corps, donc */1*

$$\boxed{\mathbb{L} \in E(A) \text{ et donc } E(A) \text{ est non vide.}}$$

   (b) Comme $E(A)$ est non vide, cette intersection a bien un sens.
   Il s'agit d'une intersection de sous-corps de $\mathbb{L}$, donc d'après la question précédente,
   $\langle A \rangle$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$.
   Ce corps contient bien A :
   $[\forall\, x \in A, \quad (\forall\, \mathbb{K} \in E(A), x \in \mathbb{K}) \Rightarrow x \in \bigcap \mathbb{K} = \langle A \rangle] \Longrightarrow A \subset \langle A \rangle$
   Enfin, tout corps $\mathbb{K}$ contenant A appartient à $E(A)$, par définition, donc $\langle A \rangle \subset \mathbb{K}$. */2*

$$\boxed{\langle A \rangle \text{ est le plus petit sous-corps de } \mathbb{L} \text{ contenant } A.}$$

On dit que $\langle A \rangle$ est le (sous-)corps (de $\mathbb{L}$) engendré par la partie A.

4. Différents exemples.
   (a) On sait que $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contient 1 et i. Donc $\langle \{1, \mathrm{i}\} \rangle \subset \mathbb{Q}[\mathrm{i}]$. */0,5*
   Réciproquement, pour tout $r = \frac{p}{q}$,
   alors $p = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{p \text{ fois}} \in \langle \{1, \mathrm{i}\} \rangle$ et $q = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{q \text{ fois}} \in \langle \{1, \mathrm{i}\} \rangle$ car $(\langle \{1, \mathrm{i}\} \rangle, +)$ est un groupe.
   puis $\frac{p}{q} \in \langle \{1, \mathrm{i}\} \rangle$ car $(\langle \{1, \mathrm{i}\} \rangle^*, \times)$ est un groupe.
   Puis, il en est de même de $r' = \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$.
   Et enfin, par stabilité additive : $r + \mathrm{i}r' \in\in \langle \{1, \mathrm{i}\} \rangle$.
   Donc $\mathbb{Q}[\mathrm{i}] \subset \langle \{1, \mathrm{i}\} \rangle$. */1,5*

$$\boxed{\mathbb{Q}[\mathrm{i}] = \langle \{1, \mathrm{i}\} \rangle}$$

   (b) On admet que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. On note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
   - L'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est bien un sous-corps de $\mathbb{R}$.
   — $1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, donc $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*$ sont non vide
   — $\forall\, x, x'\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $x - x' = (a - a') + \sqrt{2}(b - b') \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
   Donc $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$

— $\forall x, x' \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, inversible (dans $\mathbb{R}$), on a

$$(x')^{-1} = \frac{1}{a' + b'\sqrt{2}} = \frac{a' - b'\sqrt{2}}{(a')^2 - 2(b')^2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

$$x \times (x')^{-1} = \frac{aa' - 2bb'}{(a')^2 - (b')^2} + \frac{ba' - ab'}{(a')^2 - (b')^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

Donc $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ /2

• $1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ donc $\underline{\langle\{1, \sqrt{2}\}\rangle \subset \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}}$. /1

• Comme pour la question précédente, puisque $1 \in \langle\{1, \sqrt{2}\}\rangle$ alors $\mathbb{Q} \in \langle\{1, \sqrt{2}\}\rangle$.
Et de même puisque $\sqrt{2} \in \langle\{1, \sqrt{2}\}\rangle$ alors $\sqrt{2}\mathbb{Q} \in \langle\{1, \sqrt{2}\}\rangle$.
Et enfin, tout nombre de la forme $a + b\sqrt{2}$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$ sont éléments de $\langle\{1, \sqrt{2}\}\rangle$.
Ainsi $\underline{\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \langle\{1, \sqrt{2}\}\rangle}$. Par double inclusion /1,5

$$\boxed{\text{Dans } \mathbb{L} = \mathbb{R},\ \langle\{1, \sqrt{2}\}\rangle = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.}$$

Remarques !

Le fait de savoir que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, permet d'affirmer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \neq \mathbb{Q}$

Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,
$\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{R}$ qui contient $A \Longrightarrow \mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contient A.
$\mathbb{K} \in E_{\mathbb{R}}(A) \Longrightarrow \mathbb{K} \in E_{\mathbb{C}}(A)$ donc $\underline{E_{\mathbb{R}}(A) \subset E_{\mathbb{C}}(A)}$. Puis $\displaystyle\bigcap_{\mathbb{K} \in E_{\mathbb{C}}(A)} \mathbb{K} \subset \bigcap_{\mathbb{K} \in E_{\mathbb{R}}(A)} \mathbb{K}$.
Et, A étant une partie de $\mathbb{R}$, si $\mathbb{K} \in E_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\underline{\mathbb{K} \cap \mathbb{R} \text{ est un sous-corps contenant } A}$.
et $\mathbb{K} \cap \mathbb{R}$ est plus petit que $\mathbb{K}$ et est inclus dans $E_{\mathbb{R}}(A)$. Donc $\displaystyle\bigcap_{\mathbb{K} \in E_{\mathbb{R}}(A)} \mathbb{K} \subset \bigcap_{\mathbb{K} \in E_{\mathbb{C}}(A)} \mathbb{K}$

Finalement : $\underline{\displaystyle\bigcap_{\mathbb{K} \in E_{\mathbb{C}}(A)} \mathbb{K} = \bigcap_{\mathbb{K} \in E_{\mathbb{R}}(A)} \mathbb{K}}$ /2

$$\boxed{\langle\{1, \sqrt{2}\}\rangle = \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \text{ en tant que sous-corps de } \mathbb{R} \text{ ou de } \mathbb{C}.}$$

Remarques !

Si $A \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, alors nécessairement $\langle A\rangle_{\mathbb{K}} = \langle A\rangle_{\mathbb{L}}$

(c) Comme $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$, alors $\underline{\sqrt{6} \in \langle\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}\rangle}$.
Puis comme pour les deux questions précédentes on note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}\ ;\ a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.
On a alors $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \subset \langle\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}\rangle$.
Il s'agit de montrer maintenant que cet ensemble est bien un corps,
ce sera la plus petit contenant (et contenu dans) $\langle\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}\rangle$.
• Le fait qu'il s'agit d'un groupe pour la loi + est assez évident.
• Soit $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, non nul,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}} &= \frac{a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}}{(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6})(a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6})} \\
&= \frac{a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}}{(a + b\sqrt{2})^2 - (c\sqrt{3} + d\sqrt{6})^2} = \frac{a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}}{a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} - 3c^2 - 6d^2 - 6cd\sqrt{2}} \\
&= \frac{a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}}{(a^2 + 2b^2 - 3c^2 - 6d^2) + (2ab - 6cd)\sqrt{2}} \\
&= \frac{[a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}][(a^2 + 2b^2 - 3c^2 - 6d^2) - (2ab - 6cd)\sqrt{2}]}{(a^2 + 2b^2 - 3c^2 - 6d^2)^2 - 2(2ab - 6cd)^2} \\
&= A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3} + D\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Avec $A = a(a^2 + 2b^2 - 3c^2 - 6d^2) - 2b(2ab - 6cd)$, $B = b(a^2 + 2b^2 - 3c^2 - 6d^2) - a(2ab - 6cd)$,
$C = -c(a^2 + 2b^2 - 3c^2 - 6d^2) + 2d(2ab - 6cd)$ et $D = -d(a^2 + 2b^2 - 3c^2 - 6d^2) + c(2ab - 6cd)$.
Ce ne sont que des nombres rationnels. Donc $\dfrac{1}{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$
On montre alors sans trop de difficulté que $x \times x^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ pour tout $x, x' \in (\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}])^*$.
Donc $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ est un corps, contenant $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$, le plus petit : /3

$$\boxed{\langle\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}\rangle = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}\ ;\ a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}}$$

B. Construction à la règle et au compas dans $\mathbb{C}$ (Géométrie)

On considère un sous-ensemble S de $\mathbb{C}$, contenant 0 et 1

1. Il s'agit d'un résultat du cours.
   On a l'équivalence /1

   $$\boxed{(b-a)\overline{(b'-a')} \in \mathbb{R} \text{ si et seulement si les droites } (ab) \text{ et } (a'b') \text{ sont parallèles.}}$$

2. Comment tracer une famille de figures.
   (a) Pour obtenir cette médiatrice, on trace les cercles $\mathcal{C}(M, M')$ et $\mathcal{C}(M', M)$ (opération **(iii)**).
   Ils se coupent nécessairement en deux points z_1 et z_2
   (car le rayon est supérieur à la moitié de la distance entre z et z').
   La droite $(z_1 z_2)$ est la médiatrice de $[MM']$.
   On trace ensuite les droites (zz') et $(z_1 z_2)$, elles se coupent en $\dfrac{z+z'}{2}$ (opération **(i)**) /1,5

   $$\boxed{\text{On peut construire le point } \frac{z+z'}{2}.}$$

   (b) Soient z, z', $z'' \in S$. Il s'agit de tracer le cercle circonscrit au triangle $MM'M''$;
   son centre est le point de concours des médiatrices.
   D'après la question précédente, on peut tracer les médiatrices de $[MM']$ et de $[MM'']$.
   Ces droites se coupent en I (règle **(ii)**).
   On peut alors tracer le cercle de centre I, passant par M : $\mathcal{C}(I, M)$. /1,5

   $$\boxed{\text{On peut donc tracer le cercle qui passe par les points } M(z),\ M'(z') \text{ et } M''(z'')}$$

3. Addition.
   Soient z et $z' \in S$.
   (a) $\frac{z+z'}{2}$ est également le milieu du segment $[0, z+z']$,
   On trace donc le cercle $\mathcal{C}(\frac{z+z'}{2}, 0)$ et la droite $(0, \frac{z+z'}{2})$.
   Ces figures s'intersectent nécessairement, puisque O appartient aux deux courbes
   (par la suite, on exploitera plusieurs fois ce genre de raisonnement). /1

   $$\boxed{\text{Avec l'opération } \textbf{(ii)}, \text{ l'intersection de ces deux courbes donne le point } z+z'.}$$

   (b) On peut par exemple commencer par construire $-z'$
   (avec le cercle $\mathcal{C}(0, z')$) car 0 est le milieu de $[z', -z']$.
   Puis on applique le procédé à partir de z et $-z'$.
   Cela donne : /1,5

   $$\boxed{\begin{array}{rcl} -z' = \mathcal{C}(0, z') \cap (0 - z') & & \textbf{(ii)} \\ \{z_1, z_2\} = \mathcal{C}(z, -z') \cap \mathcal{C}(-z', z) & & \textbf{(iii)} \\ \frac{z-z'}{2} = (z, -z') \cap (z_1 z_2) & & \textbf{(i)} \\ z - z' = \mathcal{C}(\frac{z-z'}{2}, 0) \cap (0 \frac{z-z'}{2}) & & \textbf{(ii)} \end{array}}$$

4. Projection
   (a) $\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des réels. Donc $Oz = O\overline{z}$ et $Iz = I\overline{z}$.
   Ainsi

   $$\boxed{\{\overline{z}, z\} = \mathcal{C}(0, z) \cap \mathcal{C}(1, z) \qquad \textbf{(iii)}}$$

   (b) Si z est constructible à partir de S, alors $\overline{z}$ également d'après la question précédente.
   et ainsi Re $(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ est constructible à partir de S.
   et aussi iIm $(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ est constructible à partir de S.
   L'intersection $\mathcal{C}(0, \text{iIm }(z)) \cap (0, 1)$ permet de construire le point Im (z). /1
   Réciproquement si Re (z) et Im (z) sont constructibles à partir de S,
   On commence par tracer l'axe des imaginaires purs. /2
   Pour cela, on construit -1 car $\{-1, 1\} = \mathcal{C}(0, 1) \cap (0, 1)$.
   Puis on construit la médiatrice de $[1, -1]$.
   Avec cette droite et le cercle $\mathcal{C}(0, \text{Im}(z))$, on obtient iIm (z).
   Ensuite on peut (par exemple), construire le point $z' = \frac{1}{2}(\text{Re }(z) + \text{iIm }(z))$ (cf. 3.).
   Enfin, on construit z car $\{z, 0\} = \mathcal{C}(z', 0) \cap (z', 0)$.
   Ainsi z est constructible à partir de S.
   Par conséquent, par double implication :

   $$\boxed{z \text{ est constructible à partir de } S \text{ ssi } \text{Re}(z) \text{ et } \text{Im}(z) \text{ sont constructibles à partir de } S.}$$

(c) Si z est constructible à partir de S,

alors $|z|$ est constructible à partir de S : /1

$$\boxed{\underline{\{|z|, -|z|\} = \mathcal{C}(0,z) \cap (0,1)} \qquad \textbf{(ii)}}$$

5. Multiplication.

Soient z et $z' \in S$. On rappelle que nécessairement $1, 0 \in S$.

(a) On suppose que $\text{Im}(z) = 0$.

Il s'agit de tracer K d'affixe $zz' = \rho z'$ avec $\rho = z \in \mathbb{R}$.

Le théorème de Thalès indique que K est à l'intersection de la droite (OM') et de la droite D, parallèle à (IM') et passant par M.

Montrons que l'on peut construire cette droite D, à l'aide des règles autorisées.

— On construit $Mil(\frac{z+z'}{2})$ selon la question 3.(a)

— On construit la droite $(IMil)$, puis le cercle de centre Mil qui passe par I.

— L'intersection de cette droite et du cercle donne I' (en plus de I)

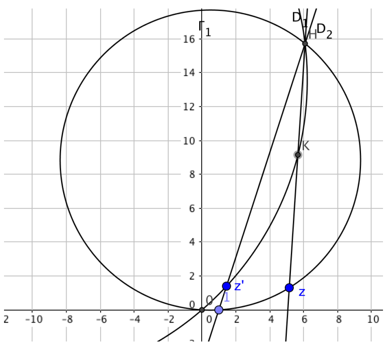
Les diagonales se coupant en leur milieu (Mil), le quadrilatère $IMI'M'$ est un parallèlogramme.

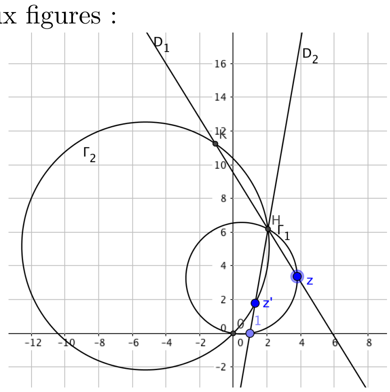
— La droite (MI') est alors parallèle à (IM') et passe par M.

L'intersection avec la droite (OM') donne le point K /2

$$\boxed{\text{On a construit le points } K \text{ d'affixe } \rho z' = z \times z'. \ zz' \text{ est donc constructible}}$$

(b) On suppose $\text{Im}(z) \neq 0$. Faisons deux figures :





— Le cercle Γ_1 qui passe par les points d'affixe $0, 1, z (\in S)$ existe bien,

car les points d'affixes 0, 1 et z ne sont pas alignés car $\text{Im}(z) \neq 0$.

On peut tracer Γ_1 d'après la question 2.(b).

— la droite D_2 peut se tracer, bien évidemment, les points d'affixe 1 et z' sont dans S.

— Le cercle Γ_1 et la droite D_2 sont nécessairement concourant, car $1 \in \Gamma_1$ et $1 \in D_2$.

(En fait, il pourrait être tangent (un point double de contact), cela correspond à une situation où on prendrait $h = z'$). Ainsi h est constructible à partir de S.

On peut alors tracer le cercle Γ_2 qui passe par les points d'affixe $0, z', h$.

— la droite D_1 bien évidemment, les points d'affixe h et z sont bien construits. /2

(c) Comme pour H, le cercle Γ_2 et la droite D_1 se coupent nécessairement, puisque h appartient à ces deux figures. Le second point K existe donc bien.

On notera H, le point d'affixe h, I le point d'affixe 1, O le point d'affixe 0 et K, le point d'affixe k.

On sait que $0, z', h, k \in \Gamma_2$, donc on a $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OK}) = (\overrightarrow{HM'}, \overrightarrow{HK})$ (angles inscrits).

De même $0, 1, z, h \in \Gamma_1$, donc on a $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HM})$.

Or H, I, M' sont alignés, donc $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HM}) = (\overrightarrow{HM'}, \overrightarrow{HM})$,

et H, K, M sont alignés donc $(\overrightarrow{HM'}, \overrightarrow{HM}) = (\overrightarrow{HM'}, \overrightarrow{HK})$.

On trouve donc :

$$\underline{(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OK}) = (\overrightarrow{HM'}, \overrightarrow{HK}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})}$$

De la même façon :

On sait que $0, z', h, k \in \Gamma_2$, donc on a $(\overrightarrow{KO}, \overrightarrow{KM'}) = (\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HM'})$ (angles inscrits).

De même $0, 1, z, h \in \Gamma_1$, donc on a $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MI}) = (\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HI})$.

Or H, I, M' sont alignés, donc $(\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HM'}) = (\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HI})$,

On trouve donc :

$$\underline{(\overrightarrow{KO}, \overrightarrow{KM'}) = (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MI})}$$

Comme la somme des angles dans un triangle vaut π, on peut affirmer que /2,5

$\boxed{\text{les triangles } KOM' \text{ et } MOI \text{ sont (directement) semblables (i.e. : les angles ont les mêmes mesures)}}$

Il existe donc une similitude s qui transforme le triangles MOI en KOM'.

C'est celle qui transforme O en O, I en M' et M en K.

Or cette similitude s de centre O (elle transforme O en O) qui transforme I en M' est $s : t \mapsto a(t-0)+0$ avec $z' = a(1)$. Donc : $s : t \mapsto z't$.

Alors $k = s(z) = z'z$ /1,5

$\boxed{K \text{ a pour affixe } z \times z' \text{, il a été construit selon les trois règles. } z \times z' \text{ est constructible.}}$

On admet que, pour tout $z \neq 0$, $\frac{1}{z}$ est également constructible.

6. $\langle\langle S\rangle\rangle$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, puisqu'il est stable par addition et multiplication induite de celles de $\mathbb{C}$ et que tout élément non nul de $\langle\langle S\rangle\rangle$ (donc inversible dans $\mathbb{C}$) est un élément de $\langle\langle S\rangle\rangle$.
   Par ailleurs $\langle\langle S\rangle\rangle$ contient S.
   Donc $\langle\langle S\rangle\rangle$ contient $\langle S\rangle$, le plus petit des sous-corps contenant S : /2

$$\boxed{\langle S\rangle \subset \langle\langle S\rangle\rangle}$$

7. Racine carrée
   (a) On considère un nombre $z \in S$, réel.
   On s'inspire de la représentation graphique donnée dans le sujet. /2
   — On obtient $-1 = \mathcal{C}(0,1) \cap (Oz)$ **(ii)**.
   — On peut construire le point $z-1 = z+(-1)$, car $z \in S$ et -1 construit.
   — Puis on a vu comment obtenir le milieu $\frac{z-1}{2}$ du segment $[0, z-1]$ (médiatrices...).
   — On trace la médiatrice à $[-1,1]$.
   — On intersecte le cercle $\mathcal{C}(\frac{z-1}{2}, z)$ avec la médiatrice précédente (**(ii)**). Cela donne H.
   — Puis on intersecte le cercle $\mathcal{C}(O,H)$ et la droite $(0,1)$. Du côté positif, on trouve H'.
   Reste à calculer les abscisses de H et H'.
   Par définition de H, son abscisse est de la forme ai. On a alors (propriété du cercle)

$$\sqrt{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + a^2} = \left|a\mathrm{i} - \frac{z-1}{2} - a\mathrm{i}\right| = \left|z - \frac{z-1}{2}\right| = \frac{z+1}{2}$$

   car $z \in \mathbb{R}_+$. Ce qui donne :

$$a^2 = \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}((z+1)^2 - (z-1)^2) = \frac{1}{4}(2z)(2) = z$$

   Donc H a pour affixe $\sqrt{z}\mathrm{i}$ et H' a pour affixe $\sqrt{z}$. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, pour } z \in S \cap \mathbb{R}_+ \text{, il est possible de construire } \sqrt{z} \text{ à partir de } S.}$$

   (b) Soit $z \in S$, non nécessairement réel. On peut écrire $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$
   On a alors $z_1 = \sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}\theta/2}$ et $z_2 = -z_1 = \sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}(\theta/2+\pi)}$
   On construit ρ sur l'axe des abscisses : c'est l'intersection : $(0,1) \cap \mathcal{C}(0,z)$ **(ii)**.
   Et en suivant la question précédente, on construit $\sqrt{\rho}$.
   Ensuite, il faut tracer la bissectrice en 0 de l'angle $1, 0, z$.
   Par exemple, on construit $z' = \mathcal{C}(0,1) \cap (0,z)$ **(ii)**.
   Puis les cercles $\mathcal{C}(z', 0)$ et $\mathcal{C}(1,0)$ se coupe en z'' **(iii)**.
   La droite $(0, z'')$ est la bissectrice recherchée.
   On a alors $\{z_1, z_2\} = \mathcal{C}(0, \sqrt{\rho}) \cap (0, z'')$ **(ii)**. /2

$$\boxed{\text{Les deux nombres } z_1 \text{ et } z_2 \in \mathbb{C} \text{ tels que } z_1^2 = z_2^2 = z \text{ sont constructibles à partir de } S.}$$

C. Construction à la règle et au compas dans $\mathbb{C}$ (Algèbre)

1. Version algébrique des opérations **(i)**, **(ii)** et **(iii)**.
   (a) Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{C}$.
   La droite (ab) a pour équation (en z) :

$$(z-b)\overline{(z-a)} = \overline{(z-b)}(z-a) \Longleftrightarrow (\overline{b} - \overline{a})z + (a-b)\overline{z} + \overline{a}b - a\overline{b} = 0$$

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } A, B \in \langle\{a, b, \overline{a}, \overline{b}\}\rangle \text{ tel que } Az - \overline{A}\overline{z} + iB = 0}$$

   car $A = (\overline{b} - \overline{a})$ et $B = 2\mathrm{Im}(\overline{a}b)$ appartiennent au corps engendré par $\{a, b, \overline{a}, \overline{b}\}$.

(b) Le cercle $\mathcal{C}(a,b)$, de centre a qui passe par b a pour équation (en z) :

$$|z-a|^2 = |b-a|^2 \Longleftrightarrow (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = (b-a)(\overline{b}-\overline{a}) \Longleftrightarrow |z|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z = |b|^2 - a\overline{b} - \overline{a}b$$

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, là encore, il existe } C, D \in \langle\{a,b,\overline{a},\overline{b}\}\rangle \text{ tel que } |z|^2 + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0,}$$

car $C = -\overline{a}$ et $D = |b|^2 - a\overline{b} - \overline{a}b$ appartiennent au corps engendré par $\{a,b,\overline{a},\overline{b}\}$.

2. Solutions polynomiales

(a) Soit z à l'intersection des droites (ab) et $(a'b')$.
Alors, il existe $A, B \in \langle\{a,b\}\rangle$ tels que $Az - \overline{A}\overline{z} + iB = 0$.
et il existe $A', B' \in \langle\{a',b'\}\rangle$ tels que $A'z - \overline{A'}\overline{z} + iB' = 0$.
On a donc en faisant : $\overline{A'}L_1 - \overline{A}L_2$:

$$(\overline{A'}A - \overline{A}A')z + i(\overline{A'}B - \overline{A}B') = 0$$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc } z \text{ s'écrit comme solution d'un polynôme à coefficient dans } \langle\{a,b,\overline{a},\overline{b},a',b',\overline{a'},\overline{b'}\}\rangle.}$$

(b) Soit z à l'intersection du cercle $\mathcal{C}(a,b)$ et de la droite $(a'b')$.
On applique le même principe, amélioré. On note $z = x + iy$
Il existe $C, D \in \langle\{a,b\}\rangle$ tel que $|z|^2 + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = x^2 + y^2 + 2\mathrm{Re}(C)x - 2\mathrm{Im}(C)y + D = 0$.
et il existe $A', B' \in \langle\{a',b'\}\rangle$ tel que $A'z - \overline{A'}\overline{z} + iB' = 2\mathrm{Im}(A')x + 2\mathrm{Re}(A')y + B' = 0$.
On a donc en faisant : remplaçant y par $\frac{B'-2\mathrm{Im}(A')x}{2\mathrm{Re}(A')}$ dans la première équation,
on a une équation polynomiale en x de degré 2 à coefficients dans $\langle\{a,b,a',b'\}\rangle$.
Et de même pour y. /2

$$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Re}(z) \text{ et } \mathrm{Im}(z) \text{ sont solution de polynômes de degré 2, à coefficients dans } \langle\{a,b,\overline{a},\overline{b},a',b',\overline{a'},\overline{b'}\}\rangle.}$$

(c) Soit z à l'intersection du cercle $\mathcal{C}(a,b)$ et et $\mathcal{C}(a',b')$.
Il existe $C, D \in \langle\{a,b\}\rangle$ tel que $|z|^2 + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = x^2 + y^2 + 2\mathrm{Re}(C)x - 2\mathrm{Im}(C)y + D = 0$.
et il existe $C', D' \in \langle\{a',b'\}\rangle$ tel que $x^2 + y^2 + 2\mathrm{Re}(C')x - 2\mathrm{Im}(C')y + D' = 0$.
Une première soustraction de ces deux équations, nous donne une équation de droite,
et l'on retrouve le cas précédent. On a la même conclusion : /1,5

$$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Re}(z) \text{ et } \mathrm{Im}(z) \text{ sont solution de polynômes de degré 2, à coefficients dans } \langle\{a,b,\overline{a},\overline{b},a',b',\overline{a'},\overline{b'}\}\rangle.}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à ses partie réelles et imaginaire.
On note CR l'ensemble des nombres réels constructibles.
Comme tout élément de $\mathbb{Q}$ est constructible, on a les inclusions $\mathbb{Q} \subset CR \subset \mathbb{R}$.
Enfin, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, CR est dense dans $\mathbb{R}$ également.
Soit $\epsilon > 0$.
Enfin, comme $|z-c| < |\mathrm{Re}(z-c)| + |\mathrm{Im}(z-c)|$,
on choisit $c_1 \in CR, c_2 \in CR$ tel que $|\mathrm{Re}(z) - c_1| < \frac{\epsilon}{2}$ et $|\mathrm{Im}(z) - c_2| < \frac{\epsilon}{2}$.
Et donc en prenant $c = c_1 + ic_2 \in CR$, on a donc $|z-c| < \epsilon$. /3

$$\boxed{\text{Ainsi, l''ensemble des nombres constructibles de } \mathbb{C} \text{ est dense dans } \mathbb{C}.}$$