

## Devoir surveillé n°4

Durée de l'épreuve : 4 heures  
**La calculatrice est interdite**

Le devoir est composé d'un exercice et d'un problème.

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (\*) voire (\*\*).

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.**

BON COURAGE

### Exercice - (Une) Suite de Ramanujan

En 1910, un comptable de Madras (Inde) proposait à ses contemporains mathématiciens (dans le *Journal de la Société mathématique indienne*) :

*Quelle est la valeur du nombre  $\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}}$  ?*

Il n'y eut aucune réponse pendant de nombreux numéros...

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on note

$$u_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + (n-1)\sqrt{1+n}}}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + (n-1)\sqrt{1+nt}}}}$$

Il s'agit donc de prouver la convergence de  $(u_n)_{n \geq 2}$  et de trouver sa limite.

1. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Montrer que  $f_n$  est croissante, sans calculer sa dérivée.  
On pourra exploiter les fonctions  $\varphi_k : t \mapsto \sqrt{1+kt}$ . On admet que  $f_n = \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \dots \circ \varphi_n$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
  - (a) Montrer qu'il existe deux nombres positifs  $a_n$  et  $b_n$  tel que  $u_n = f_n(a_n)$  et  $u_{n+1} = f_n(b_n)$ .
  - (b) En déduire les variations de la suite  $(u_n)$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $n \geq 2$ , on note  $c_n = (n+2)$ .
  - (c) Montrer que la suite  $(f_n(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite constante et donner sa valeur.
  - (d) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
4. On cherche maintenant la valeur de  $\lim(u_n)$ , un candidat naturel semble être 3.  
Soit  $\epsilon > 0$ .
  - (a) Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Montrer que  $\varphi_k$  admet une application réciproque que l'on notera  $\psi_k$ .  
Quelles sont les variations de  $\psi_k$  ?
  - (b) Soit  $e > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ .  
Montrer que  $\psi_k((k+1) - e) \geq (k+2) - 2^{\frac{k+1}{k}}e$ .
  - (c) On considère la suite  $(\epsilon_k)_{k \geq 2}$  définie par 
$$\begin{cases} \epsilon_2 = \epsilon \\ \epsilon_{k+1} = 2^{\frac{k+1}{k}}\epsilon_k \end{cases} \quad \forall k \geq 2$$
  
Exprimer, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ ,  $\epsilon_k$  en fonction de  $\epsilon$ .  
Quelle est la limite de  $(\epsilon_k)_{k \geq 2}$  et de  $((k+1) - \epsilon_k)_{k \geq 2}$  ?
  - (d) Montrer que si  $n$  est tel que  $(n+1) - \epsilon_n \leq 1$ , alors  $u_n \geq 3 - \epsilon$  (\*).
  - (e) Conclure en répondant à la question initiale posée par Srinivasa Ramanujan

# Problème - Nombres constructibles

## A. Sous-corps de $\mathbb{C}$

On rappelle que  $(\mathbb{K}, +, \times)$  est un sous-corps de  $(\mathbb{L}, +, \times)$  s'il vérifie :  
 $\mathbb{K}$  est non vide,  $\mathbb{K}$  est une partie stable de  $\mathbb{L}$  pour  $+$  et pour  $\times$  et  $\mathbb{K}$  munit des lois induites par celles de  $\mathbb{L}$  est lui-même un corps.

On admet que pour démontrer que  $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$  est un sous-corps de  $(\mathbb{L}, +, \times)$ , il faut et il suffit de montrer :

- $(\mathbb{K}, +)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{L}, +)$
  - $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \times)$  est un sous-groupe du groupe multiplicatif  $(\mathbb{L}^*, \times)$ .
- On rappelle que l'on note ici  $\mathbb{L}^* = \mathbb{L} \setminus \{0\}$

### 1. Un premier exemple.

On note  $\mathbb{Q}[i] = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{Q}, \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{Q}\}$ .

Montrer que  $\mathbb{Q}[i]$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

### 2. On suppose que $\mathbb{L}$ est un corps et que $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ sont deux sous-corps de $\mathbb{L}$ .

Montrer que  $\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2$  est un sous-corps de  $\mathbb{L}$ .

On admet que si  $(\mathbb{K}_i)_{i \in I}$  est une famille de sous-corps de  $\mathbb{L}$ , alors  $\bigcap_{i \in I} \mathbb{K}_i$  est un sous-corps de  $\mathbb{L}$ .

### 3. Sous-corps engendré par une partie.

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{L}$ . On note  $E(A) = \{\mathbb{K} \mid \mathbb{K} \text{ sous-corps de } \mathbb{L} \text{ tel que } A \subset \mathbb{K}\}$ .

(a) Montrer que  $E(A)$  est non vide.

(b) On définit

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\mathbb{K} \in E(A)} \mathbb{K}$$

Montrer que  $\langle A \rangle$  est le plus petit sous-corps de  $\mathbb{L}$  contenant  $A$ .

Ici, on parle de plus petit pour la relation d'ordre d'inclusion. On pourra commencer par définir formellement ce que cela signifie...

On dit que  $\langle A \rangle$  est le (sous-)corps (de  $\mathbb{L}$ ) engendré par la partie  $A$ .

### 4. Différents exemples.

(a) Montrer que, dans  $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}[i] = \langle \{1, i\} \rangle$

(b) On admet que  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel.

Montrer que, dans  $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ ,  $\langle \{1, \sqrt{2}\} \rangle = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

Et que vaut  $\langle \{1, \sqrt{2}\} \rangle$ , en tant que sous-corps de  $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ ?

(c) Que pensez-vous de  $\langle \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \rangle$  dans le corps  $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ ?

## B. Construction à la règle et au compas dans $\mathbb{C}$ (Géométrie)

Pour tout couple  $(a, b) \in \mathbb{C}$  de nombres complexes, on désigne par  $(ab)$  la droite passant par  $a$  et  $b$  et par  $\mathcal{C}(a, b)$  le cercle de centre  $a$  qui passe par  $b$ .

Si  $S$  est une partie de  $\mathbb{C}$  contenant 0 et 1, on dit qu'un nombre complexe  $z$  est élémentairement constructible (sous-entendu : à la règle et au compas) à partir de  $S$  s'il existe des points  $a, b, a', b'$  dans  $S$  tels qu'une des assertions suivantes est vérifiée :

(i) les droites  $(ab)$  et  $(a'b')$  ne sont pas parallèles et se croisent en  $z$ ;

(ii) le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  et la droite  $(a'b')$  se rencontrent en  $z$ ;

(iii) les cercles  $\mathcal{C}(a, b)$  et  $\mathcal{C}(a', b')$  se rencontrent en  $z$ .

Dans la suite de l'énoncé, lorsqu'on demandera comment tracer une certaine figure, on attendra une méthode justifiée exploitant uniquement les trois règles précédentes.

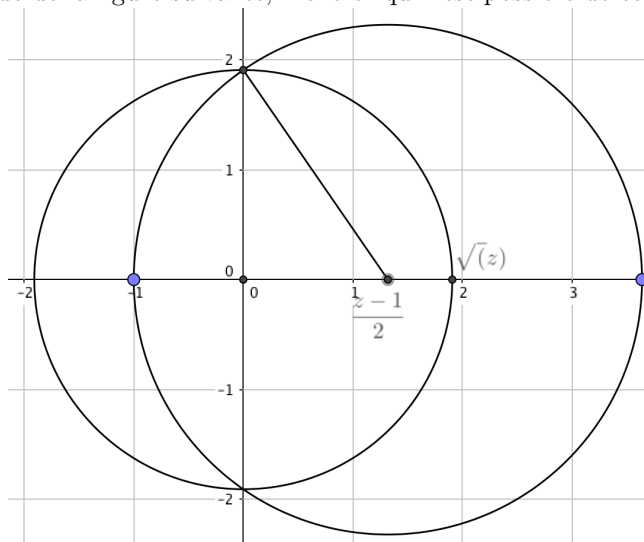
On dit qu'un nombre complexe  $z$  est constructible (sous-entendu : à la règle et au compas) à partir de  $S$  s'il existe des points  $z_1, \dots, z_n = z$  tels que, pour tout entier  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $z_i$  soit élémentairement constructible à partir de  $S \cup \{z_1, \dots, z_{i-1}\}$ .

On note  $\langle\langle S \rangle\rangle$ , l'ensemble de tous les nombres constructibles à partir de  $S$ .

Enfin, on dit qu'un nombre complexe  $z$  est constructible s'il l'est à partir de  $S_0 = \{0, 1\}$  i.e.  $z \in \langle\langle \{0, 1\} \rangle\rangle$ .

On considère donc un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{C}$ , contenant 0 et 1. On pourra faire la confusion entre un point et son affixe complexe :  $O$  avec 0,  $I$  avec 1 et  $M$  avec  $z$ .

1. Quelle propriété concernant le nombre  $(b-a)\overline{(b'-a')}$  est équivalente au fait que les droites  $(ab)$  et  $(a'b')$  ne sont pas parallèles.  
On attend le résultat directement, sans démonstration
2. Comment tracer une famille de figures.
  - (a) Soient  $z$  et  $z' \in S$ . Comment tracer la médiatrice de  $[MM']$  où  $M(z)$  et  $M'(z')$  (avec uniquement les règles (i), (ii) et (iii)) ?  
En déduire que l'on peut construire le point  $\frac{z+z'}{2}$  à partir de  $S$ .
  - (b) Soient  $z, z', z'' \in S$ . Comment tracer le cercle qui passe par les points  $M(z)$ ,  $M'(z')$  et  $M''(z'')$  ?
3. Addition.  
Soient  $z$  et  $z' \in S$ .
  - (a) Avec le point  $O(0)$ , montrer que le point  $z+z'$  est constructible à partir de  $S$ .
  - (b) Énoncer, sans justifier, un procédé pour construire le point  $z-z'$  à partir de  $S$ .
4. Projection
  - (a) Justifier un procédé qui permet de construire  $\bar{z}$  à partir de  $z, 0$  et  $1$
  - (b) Montrer que :  
 $z$  est constructible à partir de  $S$  ssi  $\operatorname{Re}(z)$  et  $\operatorname{Im}(z)$  sont constructibles à partir de  $S$ .
  - (c) Montrer que si  $z$  est constructible à partir de  $S$ , alors il en est de même de  $|z|$ .
5. Multiplication.  
Soient  $z$  et  $z' \in S$ . On rappelle que nécessairement  $1, 0 \in S$ .
  - (a) On suppose, pour cette question (a) uniquement, que  $\operatorname{Im}(z) = 0$ .  
En utilisant le théorème de Thalès, comment construire le point d'abscisse  $zz'$  ?
  - (b) On suppose maintenant  $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ . Montrer qu'on peut tracer :
    - le cercle  $\Gamma_1$  qui passe par les points d'abscisse  $0, 1, z$ .  
*Pourquoi est-ce bien un cercle ?*
    - la droite  $D_2$  qui passe par les points d'abscisse  $1$  et  $z'$
    - le cercle  $\Gamma_2$  qui passe par les points d'abscisse  $0, z', h$ , où  $\{h, 1\} = \Gamma_1 \cap D_2$ .  
*Pourquoi  $h$  est-il bien défini ?*
    - la droite  $D_1$  qui passe par les points d'abscisse  $h$  et  $z$ .
  - (c) Quel est l'abscisse  $k$  du point  $K$  tel que  $\{h, k\} = \Gamma_2 \cap D_1$  ?  
En déduire que  $z \times z'$  est constructible (dans ce cas  $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ ).  
On admet que, pour tout  $z \neq 0$ ,  $\frac{1}{z}$  est également constructible.
6. Quelle relation existe-t-il entre  $\langle S \rangle$  et  $\langle \langle S \rangle \rangle$  ?
7. Racine carrée
  - (a) On considère un nombre  $z \in S$ , réel positif.  
A l'aide de la figure suivante, montrer qu'il est possible de construire  $\sqrt{z}$  à partir de  $S$ .



- (b) Soit  $z \in S$ , non nécessairement réel.  
En exploitant la description polaire de  $z$ , montrer que les deux nombres  $z_1$  et  $z_2 \in \mathbb{C}$  tels que  $z_1^2 = z_2^2 = z$  sont constructibles à partir de  $S$ .

## C. Construction à la règle et au compas dans $\mathbb{C}$ (Algèbre et analyse)

On conserve les définitions vues en partie B. Dans cette partie, nous avons établi comment construire, la somme, le produit, l'inverse de tout nombres constructibles; nous avons également vu comment construire (sous-entendu : à la règle et au compas) la racine carrée d'un nombre constructible. Nous allons établir ici la propriété réciproque : *il n'existe pas d'autres nombres élémentairement constructibles.*

### 1. Version algébriques des opérations (i), (ii) et (iii).

(a) Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ .

Montrer que si  $z \in (ab)$ , il existe  $A, B \in \langle \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\} \rangle$  tel que  $Az - \bar{A}\bar{z} + iB = 0$ .

(b) Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ .

Montrer que si  $z \in \mathcal{C}(a, b)$ , il existe  $C, D \in \langle \{a, b\bar{a}, \bar{b}\} \rangle$  tel que  $|z|^2 + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$ .

### 2. Solution polynomiale

(a) Soient  $a, b, a', b' \in \mathbb{C}$ .

Montrer que si  $z$  est l'intersection des droites  $(ab)$  et  $(a'b')$ , alors  $z$  est la racine d'un polynôme de degré 1 à coefficients dans le corps  $\langle \{a, b, \bar{a}, \bar{b}, a', b', \bar{a}', \bar{b}'\} \rangle$ .

(b) Soient  $a, b, a', b' \in \mathbb{C}$ .

Montrer que si  $z$  est l'intersection du cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  et de la droite  $(a'b')$ , alors  $\operatorname{Re}(z)$  et  $\operatorname{Im}(z)$  sont chacun racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans le corps  $\langle \{a, b, \bar{a}, \bar{b}, a', b', \bar{a}', \bar{b}'\} \rangle$ .

(c) Soient  $a, b, a', b' \in \mathbb{C}$ .

Montrer que si  $z$  est l'intersection des cercles  $\mathcal{C}(a, b)$  et  $\mathcal{C}(a', b')$ , alors  $\operatorname{Re}(z)$  et  $\operatorname{Im}(z)$  sont chacun racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans le corps  $\langle \{a, b, \bar{a}, \bar{b}, a', b', \bar{a}', \bar{b}'\} \rangle$ .

*En prolongeant cette étude, nous pourrions démontrer le*

**THÉORÈME (Wantzel, 1837).**

Soit  $E$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ . Un complexe  $z$  est constructible à la règle et au compas à partir de  $E$  si et seulement s'il existe un entier  $n$  et une suite de sous-corps de  $\mathbb{R}$ ,

$$E = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n$$

tels que pour tout  $i \in \{1; \dots; n\}$ ,  $\dim_{E_{i-1}}(E_i) = 2$  et tels que  $x \in E_n$

*Autrement écrit, les nombres constructibles sont uniquement par suites d'opérations algébriques de type : résolution de polynômes de degré 1 ou 2 à coefficients dans les nombres constructibles à l'étape précédente.*

*Il est ainsi impossible de construire  $\sqrt[3]{2}$  avec des entiers. Car le polynôme à coefficients entiers de degré le plus petit et dont  $\sqrt[3]{2}$  est solution est  $x^3 - 2$ , de degré  $3 > 2$ .*

### 3. Montrer que l'ensemble des nombres constructibles de $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathbb{C}$ .