MPSI 3 - Fermat Le 27.11.18
2018-2019

Devoir à la maison n°4
CORRECTION

Exercice - Groupe distingué

On considère $(G, \star)$ un groupe et $(H, \star)$ un sous-groupe de $(G, \star)$.
On note $\mathcal{R}_H$, la relation définie sur G par :

$$x \,\mathcal{R}_H\, y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \star y^{-1} \in H$$

1. En trois temps :
   — $\forall\, x \in G$, $x \star x^{-1} = e \in H$, car H est un sous-groupe de G.
   Donc $\forall\, x \in G$, $x \,\mathcal{R}_H\, x$, donc $\mathcal{R}_H$ est réflexive.
   — Soient $x, y \in G$, tels que $x \,\mathcal{R}_H\, y$.
   Alors $x \star y^{-1} \in H$, H est sous-groupe, donc $(x \star y^{-1})^{-1} \in H$.
   Or $(x \star y^{-1})^{-1} = (y^{-1})^{-1} \star x^{-1} = y \star x^{-1}$, donc $y \,\mathcal{R}_H\, x$. Ainsi $\mathcal{R}_H$ est symétrique.
   — Soient $x, y, z \in H$ tels que $x \,\mathcal{R}_H\, y$ et $y \,\mathcal{R}_H\, z$ Donc $x \star y^{-1} \in H$ et $y \star z^{-1} \in H$, par stabilité par produit : $(x \star y^{-1}) \star (y \star z^{-1}) = x \star z^{-1} \in H$.
   Donc $x \,\mathcal{R}_H\, z$ et ainsi $\mathcal{R}_H$ est transitive.

   $$\boxed{\mathcal{R}_H \text{ est une relation d'équivalence.}}$$

Remarques !
On constate que le fait d'être un sous-groupe correspond exactement aux propriétés de la relation d'équivalence :
- *H est non vide et $e \in H$* $\leftrightarrow$ *$\mathcal{R}_H$ réflexive*
- *H est stable par passage au symétrique* $\leftrightarrow$ *$\mathcal{R}_H$ symétrique*
- *H est stable par produit* $\leftrightarrow$ *$\mathcal{R}_H$ transitive*

2. Soient $x \in G$ et $h \in H$. On **doit** calculer : $x \star h \star x^{-1} \big(= x \star h \star e^{-1} \star x^{-1} \big)$.
   Or $x \,\mathcal{R}_H\, x$ et $h \,\mathcal{R}_H\, e$, car $h \in H$.
   Donc si (1) est vraie :

   $$(x \star h) \,\mathcal{R}_H (x \star e) \Longleftrightarrow (x \star h) \star (x \star e)^{-1} \in H \Longleftrightarrow x \star h \star e^{-1} \star x^{-1} = x \star h \star x^{-1} \in H$$

   $$\boxed{\text{Si (1) est vérifiée alors } H \text{ est distingué}}$$

3. Supposons que H soit un sous-groupe distingué de G.
   Soient $x, x', y, y' \in G$ tel que $\overline{x} = \overline{x'}$ et $\overline{y} = \overline{y'}$.
   Alors $y(y')^{-1} \in H$ et $x(x')^{-1} \in H$ donc $x'x^{-1} \in H$.
   On cherche à montrer que $(x \star y) \,\mathcal{R}\, (x' \star y')$, on **doit** donc calculer :

   $$\begin{aligned}(x \star y) \star (x' \star y')^{-1} &= x \star \overbrace{(y \star (y')^{-1})}^{=h \in H} \star (x')^{-1} = x \star h \star (x')^{-1} = x \star h \star \overbrace{(x^{-1} \star x)}^{=e} \star (x')^{-1} \\ &= \underbrace{(x \star h \star x^{-1})}_{\in H \text{ car } H \text{ distingué}} \star \underbrace{(x \star (x')^{-1})}_{\in H} \in H\end{aligned}$$

   Donc $(x \star y) \,\mathcal{R}\, (x' \star y')$.

   $$\boxed{\text{si } H \text{ est distingué alors (1) : } (x \star y) \,\mathcal{R}\, (x' \star y') \text{ est vraie.}}$$

4. $\left(\frac{G}{H}, \overline{\star}\right)$ n'est pas un sous-groupe. Il faut vérifier tous les axiomes.
   — $\left(\frac{G}{H}, \overline{\star}\right)$ est non vide, $\overline{e} \in \frac{G}{H}$.
   — Par construction, la loi $\overline{\star}$ est bien une loi interne à $\left(\frac{G}{H}, \overline{\star}\right)$ (stabilité par produit)
   — $\forall\, X, Y, Z \in \frac{G}{H}$, on peut prendre x, y et z représentants respectivement de X, Y et Z, i.e. : $X = \overline{x}$, $Y = \overline{y}$ et $Z = \overline{z}$. Alors

   $$\begin{aligned}(X \,\overline{\star}\, Y) \,\overline{\star}\, Z &= (\overline{x} \,\overline{\star}\, \overline{y}) \,\overline{\star}\, \overline{z} = (\overline{x \star y}) \,\overline{\star}\, \overline{z} \\ &= \overline{(x \star y) \star z} = \overline{x(\star y \star z)} \qquad \text{associativité dans } G \\ &= \overline{x} \,\overline{\star}\, \overline{(y \star z)} = \overline{x} \,\overline{\star}\, (\overline{y} \,\overline{\star}\, \overline{z}) = X \,\overline{\star}\, (Y \,\overline{\star}\, Z)\end{aligned}$$

   (en exploitant la propriété démontrée (1) aux questions précédentes).
   Donc $\left(\frac{G}{H}, \overline{\star}\right)$ est associatif.

— $\forall X \in \frac{G}{H}$, on peut prendre x représentant de X, i.e. : $X = \overline{x}$. Alors

$$\overline{x} \,\overline{\star}\, \overline{e} = \overline{x \star e} = \overline{x} = \overline{e \star x} = \overline{e} \,\overline{\star}\, \overline{x}$$

(en exploitant la propriété démontrée (1) aux questions précédentes).
Donc $\left(\frac{G}{H}, \overline{\star}\right)$ admet un élément neutre : $\overline{e}$ (comparable à H)

— $\forall X \in \frac{G}{H}$, on peut prendre x représentant de X, i.e. : $X = \overline{x}$. Alors

$$\overline{x} \,\overline{\star}\, \overline{x^{-1}} = \overline{x \star x^{-1}} = \overline{e} = \overline{x^{-1} \star x} = \overline{x^{-1}} \,\overline{\star}\, \overline{x}$$

(en exploitant la propriété démontrée (1) aux questions précédentes).
Donc tout $X = \overline{x} \in \frac{G}{H}$ admet un élément symétrique : $\overline{-x}$

Ainsi

$$\boxed{\left(\frac{G}{H}, \overline{\star}\right) \text{ est bien un groupe. On parle de } \textit{groupe quotient.}}$$

5. Soit $f : (G, \star) \to (G', T)$, un morphisme de groupe.
Notons d'abord que Ker f est un sous-groupe de G.
— Soit e_G, le neutre de G, alors $f(e_G) = e_{G'}$ car f est un morphisme.
Donc Ker f est non vide.
— Soient $x, y \in$ Ker f, donc $f(x) = f(y) = e_{G'}$, donc :

$$f(x \star y) = f(x) T f(y^{-1}) = e_{G'} T [f(y)]^{-1} = e_{G'} T (e_{G'})^{-1} = e_{G'}$$

Donc Ker f est bien un sous-groupe de G. Reste à montrer qu'il est distingué.
Soient $x \in G$ et $h \in$ Ker f,

$$f(x \star h \star x^{-1}) = f(x) T f(h) T f(x^{-1}) = f(x) T e_{G'} T f(x^{-1}) = f(x) T f(x^{-1}) = f(x \star x^{-1}) = f(e_G) = e_{G'}$$

Donc $x \star h \star x^{-1} \in$ Ker f, pour tout $h \in$ Ker f.

$$\boxed{\text{Ker } f = f^{-1}(e_{G'}) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\} \text{ est un sous-groupe distingué de } G.}$$

Problème - Suite logistique

I. Discrétisation du modèle de Verhulst

Dans cette partie (uniquement), on considère $h > 0$, appelé *pas* du problème et on note $u_n = f(nh)$.
Si h st petit : $u_{n+1} - u_n = f((n+1)h - f(nh) \approx h \times f'(nh)$.

On suppose donc que f est solution de l'équation différentielle : $y'(t) = r\left(1 - \dfrac{y(t)}{K}\right) y(t)$.

1. On a donc, en $t = nh$:

$$u_{n+1} - u_n = hf'(nh) = hr\left(1 - \frac{y(nh)}{K}\right) y(nh) = rh\left(1 - \frac{u_n}{K}\right) u_n = rhu_n - \frac{rh}{K} u_n^2$$

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (rh+1)u_n - \frac{rh}{K} u_n^2}$$

2. On note $v_n = \dfrac{rh}{K(rh+1)} u_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{rh}{K(rh+1)} u_{n+1} = \frac{rh}{K(rh+1)} \left((rh+1)u_n - \frac{rh}{K} u_n^2\right) \\ &= (rh+1)\left(\frac{rh}{K(rh+1)} u_n - \frac{r^2h^2}{K^2(rh+1)^2} u_n^2\right) = (rh+1)(v_n - v_n^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = a v_n (1 - v_n) \text{ avec } a = rh + 1}$$

Remarques !

On rappelle que r est le taux de reproduction. On le retrouve multiplié par h, le pas de temps élémentaire.
L'ajout $+1$ est lié au fait que naturellement, la reproduction n'est pas mesuré par u_{n+1}, mais par $u_{n+1} - u_n$.
Finalement, on a (au premier ordre) : $u_{n+1} = u_n + rhu_n + \dots$. Logique

3. On suppose que $a \in [0,4]$. $f_a : x \mapsto ax(1-x)$.
Il s'agit d'un polynôme écrit sous forme factorisée ; il s'annule en 0 et 1 ($f_a(0) = f_a(1) = 0$).
Il est maximal en $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ et vaut alors $f_a(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4}$.
Ainsi, f_a est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ à valeurs dans $[0, \frac{a}{4}]$,
puis décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ à valeurs dans $[0, \frac{a}{4}]$ également.
Puis comme $a \in [0,4]$, $\frac{a}{4} \in [0,1]$ et donc les racines du polynôme f_a sont 0 et 1.

$$\boxed{\text{Et l'intervalle } [0,1] \text{ est stable par } f_a \text{ et la suite } ({}^a x_n) \text{ est bien définie.}}$$

II. Etude de la suite logistique. Cas simple : $a < 3$

Dans cette partie, on considère $a \in [0,3]$

1. Le signe de φ_a permet d'étudier les variations de $({}^a x_n)$,
ses racines donnent les limites potentielles de la suite $({}^a x_n)$.

$$\varphi_a(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow ax(1-x) - x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x(a - ax - 1) \geqslant 0 \Longleftrightarrow ax\left(\frac{a-1}{a} - x\right) \geqslant 0$$

$$\boxed{\varphi_a(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x \in \left[0; \frac{a-1}{a}\right] & \text{si } a > 1 \\ x \in \left[\frac{a-1}{a}; 0\right] & \text{si } a \leqslant 1 \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\text{Les limites potentielles de } ({}^a x_n) \text{ (si } ({}^a x_n) \text{ converge) sont alors 0 et } \tfrac{a-1}{a}}$$

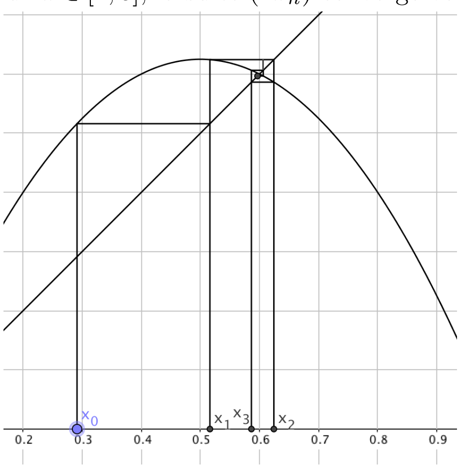
2. Dans le cas $a \leqslant 1$, pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi_a(x) \leqslant 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \varphi_a(u_n) \leqslant 0$ et donc (u_n) est décroissante.
Cette suite est minorée par 0, donc (u_n) converge.
Parmi les limites possibles 0 et $\frac{a-1}{a}$, seule 0 est élément de $[0,1]$ (stable par f_a)

$$\boxed{\text{Dans ce cas } a \leqslant 1,\ ({}^a x_n) \text{ est décroissante et convergente vers } 0}$$

3. Dans le cas $1 < a \leqslant 2$,
Dans ce cas, pour tout $x \in [0,1]$, $f_a(x) \leqslant f_a(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4} \leqslant \frac{1}{2}$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, ${}^a x_n = f_a({}^a x_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}$ ie $({}^a x_n)_{n \geqslant 1} \in [0, \frac{1}{2}]^{\mathbb{N}^*}$.
Puis, par croissance de f_a sur $[0, \frac{1}{2}]$:
$f_a([0, \frac{a-1}{a}] = [f_a(0), f_a(\frac{a-1}{a})] = [0, \frac{a-1}{a}]$
$f_a([\frac{a-1}{a}, \frac{1}{2}] = [f_a(\frac{a-1}{a}), f_a(\frac{1}{2})] = [\frac{a-1}{a}, \frac{a}{4}] \subset [\frac{a-1}{a}, \frac{1}{2}]$
Ainsi les deux intervalles $[0, \frac{a-1}{a}]$ et $[\frac{a-1}{a}, \frac{1}{2}]$ sont stable par f_a.
la suite $({}^a x_n)_{n \geqslant 1}$ reste soit dans l'intervalle $[0, \frac{a-1}{a}]$, soit dans l'intervalle $[\frac{a-1}{a}, \frac{1}{2}]$.
Enfin, avec l'étude du signe de g_a, on peut affirmer que :
   - si ${}^a x_1 \leqslant \frac{a-1}{a}$, $({}^a x_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante ($g_a \geqslant 0$ sur $[0, \frac{a-1}{a}]$), majorée par $\frac{a-1}{a}$
   - si ${}^a x_1 \geqslant \frac{a-1}{a}$, $({}^a x_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante ($g_a \leqslant 0$ sur $[\frac{a-1}{a}, \frac{1}{2}]$), minorée par $\frac{a-1}{a}$

Donc dans tous les cas :
$$\boxed{({}^a x_n) \text{ est convergente vers } \tfrac{a-1}{a}}$$

4. On admet que pour $a \in [2,3]$, la suite $({}^a x_n)$ converge vers $\frac{a-1}{a}$.



On a l'escargot :

5. f_a est dérivable sur $[0,1]$ et $f_a'(x) = a - 2ax$.
Donc $f_a'(0) = a$ et $f_a'(\frac{a-1}{a}) = 2 - a$.

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \text{ est un point fixe attractif si et seulement si } a < 1 \\ \frac{a-1}{a} \text{ est un point fixe attractif, si et seulement si } |2-a| < 1, \text{ si et seulement si } a \in [1,3] \end{array}}$$

6.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On retrouve que si } a<1, \text{ la limite/point fixe est bien 0 (attractif)}\\ \text{et si } a\in[1,3], \text{ la limite est } \frac{a-1}{a} \text{ attractif.}\end{array}}$$

Remarques !

La situation $a<1$, correspond à une situation $rh<0$, et donc $r<0$, évidemment cela conduit à la disparition de la population.
Le cas $a>1$ correspond à une convergence pour le modèle de Verhulst. Dans le cas continue, on a vu que $X(t)\to K$.
Ici, on trouve $(v_n)\to \frac{a-1}{a}=\frac{rh}{rh+2}$ et donc par linéarité : $u_n=\dfrac{K(rh+1)}{rh}v_n\to K\dfrac{rh+1}{rh+2}$.
C'est comparable, même s'il y a un facteur $\lambda=\dfrac{rh+1}{rh+2}\in[\frac{1}{2},1]$ multiplicatif qui lie les deux termes

III. Etude de la suite logistique. Cas plus compliqué : $a\in]3,4[$

1. On l'a vu en fin de partie précédente :

$$\boxed{\text{les deux points fixes de } f_a : 0 \text{ et } \tfrac{a-1}{a} \text{ sont répulsifs.}}$$

Remarques !

0 et $\frac{a-1}{a}$ ne peuvent être limite de la suite $({}^a x_n)$ qui tourne donc dans $[0,1]$ selon deux modalités : périodique ou chaotique

2. Soit $m\in\mathbb{N}$ ($m=2n$ ou $m=2n+1$),

$$\begin{aligned}{}^a x_{m+2} &= a({}^a x_{m+1})(1-{}^a x_{m+1}) = a(a({}^a x_m)(1-{}^a x_m))(1-a({}^a x_m)(1-{}^a x_m))\\ &= a^2({}^a x_m)(1-{}^a x_m)(1-a({}^a x_m)+a({}^a x_m)^2) = (f_a\circ f_a)({}^a x_m)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les deux suites extraites : } ({}^a x_{2n+1}) \text{ et } ({}^a x_{2n+2}) \text{ vérifie donc la relation de récurrence :}\\ u_{m+1}=a^2u_m(1-u_m)(1-au_m+au_m^2)=(f_a\circ f_a)(u_m)\end{array}}$$

3. Les points fixes de $f_a\circ f_a$ (limites potentielles) sont obtenus en résolvant : $f_a\circ f_a(x)=x$

$$\begin{aligned}a^2x(1-x)(1-ax+ax^2)=x &\iff x[a^2(1-x)(1-ax+ax^2)-1]=0\\ &\iff x[(a^2-1)-(a^2+a^3)x+2a^3x^2-a^3x^3]=0\end{aligned}$$

Nécessairement $x=\frac{a-1}{a}$ est une racine de ce problème car $f_a(f_a(\frac{a-1}{a}))=f_a(\frac{a-1}{a})=\frac{a-1}{a}$.
On factorise donc par $((a-1)-ax)$:

$$a^2x(1-ax)(1-ax+ax^2)=x \iff x((a-1)-ax)[(a+1)-a(a+1)x+a^2x^2]=0$$

Ce qui donne $\Delta=a^2(a+1)^2-4a^2(a+1)=a^2(a+1)[a+1-4]=a^2(a+1)(a-3)$.
Justement, $a\geqslant 3$, et donc $\Delta\geqslant 0$.
On retrouve donc quatre points fixes, les deux premiers étant répulsifs :

$$\boxed{0,\quad \frac{a-1}{a},\quad \mu_1=\frac{a(a+1)-a\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a^2}=\frac{a+1-\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a},\quad \mu_2=\frac{a+1+\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}}$$

4. Etudions l'attractivité des deux nouveaux points. Il s'agit de comparer $|(f_a\circ f_a)'(\alpha)|$ à 1.
Or, d'après les calculs précédents :

$$(f_a\circ f_a)'(x)=f_a'(x)\times f_a'\circ f_a(x)=(a-2ax)\times(a-2a(ax(1-x)))=a(1-2x)(a-2a^2x+2a^2x^2)$$

On sait que μ_1 et μ_2 sont racines de $(a+1)-a(a+1)x+a^2x^2$, donc $(a+1)-a(a+1)\mu+a^2\mu^2=0$.
Donc $2a^2\mu^2-2a^2\mu+a=2a\mu-2-a$ et ainsi :

$$\begin{aligned}(f_a\circ f_a)'(\mu) &= a(1-2\mu)(a-2a^2\mu+2a^2\mu^2)=a(1-2\mu)(2a\mu-2-a)=a(-2-a+(4a+4)\mu-4a\mu^2)\\ &= -(2a+a^2-4a(a+1)\mu+4a^2\mu^2)=-(2a+a^2-4(a+1))=-a^2+2a+4\end{aligned}$$

toujours en exploitant la même relation vérifiée par $a^2\mu^2$.
Puis on cherche la condition $|(f_a\circ f_a)'(\mu)|\leqslant 1$, donc à résoudre : $|4+2a-a^2|\leqslant 1$.

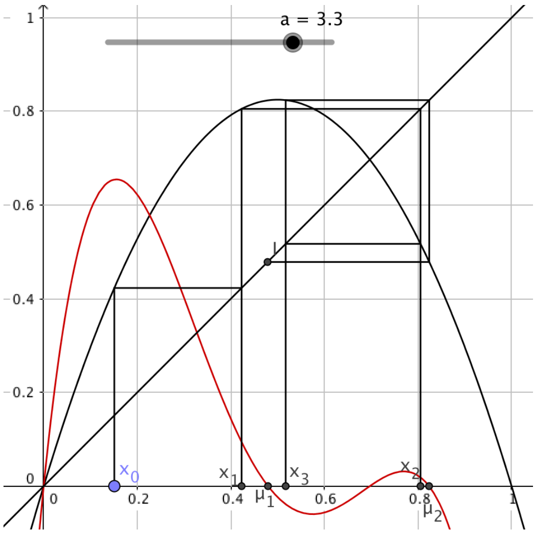
- Cas $(f_a\circ f_a)'(\mu)\geqslant 0$.
  Or $4+2a-a^2-1=-a^2+2a+3=-(a-3)(a+1)$. On retrouve le cas précédent $a=3$.
- Cas $(f_a\circ f_a)'(\mu)\leqslant 0$.

Or le discriminant (en a) de $4+2a-a^2+1=-a^2+2a+5$ est $\Delta = 4+20 = 24$.
Donc les racines sont $\dfrac{-2\pm\sqrt{24}}{-2} = \dfrac{2-\pm 2\sqrt{6}}{2}$
On a donc $a = 1\pm\sqrt{6}$.
Plus précisément : on a le tableau de valeurs :

a	$(1-\sqrt{6}$) 3	$1+\sqrt{6}$ 4
$f_a \circ f_a'(\mu_a)$	1 $\in]-1,1[$	-1 <-1
Caractère de $\mu_i(a)$	| attractifs	| répulsifs

5. Dans le cas présent $a \in]3, 1+\sqrt{6}[$, les points 0 et $\frac{a-1}{a}$ sont répulsifs.
Mais ce n'est pas le cas des nombres μ_1 et μ_2.
En fait, comme le montre le graphique qui suit :

$$\boxed{\text{selon la valeur de } {}^a x_0 \text{, l'une des suites extraites } ({}^a x_{2n+1}) \text{ ou } ({}^a x_{2n+2}) \text{ converge vers } \mu_1 = \frac{a+1-\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a} \text{ et l'autre vers } \mu_2 = \frac{a+1+\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}}$$



IV. Etude de la suite logistique. Cas un peu moins simple : $a = 4$

Ici $a=4$ et on considère un élément ${}^4x_0 \in [0,1[$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin^2(\frac{1}{2}\pi\theta) =^4 x_0$.
   alors $\arcsin(2\pi\theta) = \sqrt{{}^4x_0}$. C'est possible car ${}^4x_0 \geqslant 0$ et ${}^4x_0 \leqslant 1$.
   donc $\frac{\pi}{2}\theta = \arcsin(\sqrt{{}^4x_0})[2\pi]$ ou $\frac{\pi}{2}\theta = \pi - \arcsin(\sqrt{{}^4x_0})[2\pi]$.
   Ainsi $\theta = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{{}^4x_0})[4]$ ou $\theta = 2 - \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{{}^4x_0})[4]$.
   Or $\arcsin u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $\frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{{}^4x_0}) \in [-1,1]$.
   et comme $\sqrt{{}^4x_0} \geqslant 0$, et ${}^4x_0 \neq 1$ on a plus précisément :
   $\frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{{}^4x_0}) \in [0,1[$ et $2-\frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{{}^4x_0}) \in]1,2]$.
   Ainsi, s'il existe, il y a un unique $\theta \in [0,1]$ (plus précisément dans $[0,1[$) tel que $\sin^2(\frac{1}{2}\pi\theta) =^4 x_0$.
   Et réciproquement, si $\theta = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{{}^4x_0})$, $\theta \in [0,1[$ et $\sin^2(\frac{1}{2}\pi\theta) =^4 x_0$.
   Ce raisonnement en analyse-synthèse permet de conclure :

$$\boxed{\text{il existe un unique } \theta \in [0,1] \text{ tel que } {}^4x_0 = \sin^2(\tfrac{\pi}{2}\theta).}$$

2. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « ${}^4x_n = \sin^2(2^{n-1}\pi\theta)$ »
   — $\mathcal{P}_0$ est vraie : ${}^4x_0 = \sin^2(2^{0-1}\pi\theta)$.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$\begin{aligned} {}^4x_{n+1} &= 4({}^4x_n)(1-^4 x_n) = 4\sin^2(2^{n-1}\pi\theta)\big(1-\sin^2(2^{n-1}\pi\theta)\big) \\ &= 4\sin^2(2^{n-1}\pi\theta)\cos^2(2^{n-1}\pi\theta) = \big(\sin(2\times 2^{n-1}\pi\theta)\big)^2 = \sin^2(2^n\pi\theta) \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad {}^4x_n = \sin^2(2^{n-1}\pi\theta)}$$

Remarques !
Dans ce cas particulier $a = 4$, on est donc capable de donner une expression exacte de ${}^4x_n$, pour tout entier.
Du moins en théorie...

On note, pour tout entier n, $\theta_n = 2^n\theta - \lfloor 2^n\theta \rfloor$

3. On a alors, pour tout entier n, $\theta_n \in [0,1]$ et pour tout entier n :

$$\theta_{n+1} \equiv 2^{n+1}\theta \equiv 2 \times 2^n\theta \equiv 2\theta_n \qquad [1]$$

$${}^4x_n = \sin^2(\frac{\pi}{2}\theta_n)$$

4. En tenant compte de l'expression qui lie $({}^4x_n)$ est $(\theta_n)_n$, il suffit d'étudier les propriétés de la seconde suite, pour obtenir celles de la première.
   — Supposons que θ est rationnel, et selon l'énoncé, supposons que $\theta = \dfrac{p}{2^kq}$,
   avec q impair et $p \wedge 2^kq = 1$ (décomposition irréductible de θ - on peut avoir $k = 0$),
   Pour tout $n \geqslant k$, $\qquad \theta_n \equiv 2^n\theta \equiv 2^{n-k}\dfrac{p}{q} \quad [1]$.
   Puis pour tout $n \geqslant k$,
   $$\theta_{n+q-1} \equiv 2^{n-k}2^{q-1}\frac{p}{q} \equiv 2^{n-k}\frac{p}{q} \qquad [1]$$
   car $2^{q-1} \equiv 1[q]$ d'après le petit théorème de Fermat ($q \wedge 2 = 1$).
   Donc $\theta_{n+q-1} = \theta_n$, pour tout $n \geqslant k$.
   Ainsi, la suite (θ_n) est une suite périodique à partir du rang k et de période $q-1$.
   Il en est de même pour la suite $({}^4x_n) = \left(\sin\frac{\pi}{2}\theta_n\right)$.

   $$\boxed{({}^4x_n)_n \text{ est une suite périodique à partir du rang } k \text{ et de période } q-1}$$

   — Pour étudier la densité de (θ_n) dans $[0,1]$, on peut exploiter la décomposition en base 2.
   En effet, on peut décomposer θ en base 2 (comme sous python) :

   $\theta = 0,1011001010010011\ldots$ on note $a_n(\theta) = n^{\text{eme}}$ chiffre (décimales binaires) de θ

   On a alors
   $$\theta = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k(\theta)}{2^k}$$
   $$2^n\theta = \sum_{k=1}^{n}2^{n-k}a_k(\theta) + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a_k(\theta)}{2^{k-n}} \qquad \Longrightarrow \theta_n = 2^n\theta - \lfloor 2^n\theta \rfloor = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a_k(\theta)}{2^{k-n}} = \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{a_{h+n}(\theta)}{2^h}$$
   La suite (θ_n) sera dense, si on retrouve dans le développement de θ, tous les nombres :
   pour $a < b \in [0,1]$ et $k = \min(h \mid 2^h(b-a) > 1)$,
   si $\forall\ h \leqslant k$, $a_h(a) = a_{M+h}(\theta)$.
   on trouve les k premières décimales binaires de a successivement dans la suite des décimales de θ à partir de la position M
   alors $a \leqslant \theta_M \leqslant b$.
   Et donc dans ce cas (θ_n) est dense dans $[0,1]$.
   Mais cette hypothèse n'est pas équivalente à θ non rationnelle
   (celle-ci est équivalente à : la suite des décimales est périodique à partir d'un certain rang).
   Ainsi avec

   $$\theta = 0,1\,\underbrace{01}\,\underbrace{001}\,\underbrace{0001}\,\underbrace{00001}\ldots \qquad a_n(\theta) = 1 \Longleftrightarrow n = \frac{k(k+1)}{2}$$

   On a θ non rationnel (aucune répétition dans les décimales)
   et on ne peut trouver de θ_n entre $a = 0,110_2$ et $b = 0,111_2$, par exemple.
   Donc (θ_n) non dense dans $[0,1]$ et θ non rationnel.

Remarques !
...car en pratique, la connaissance de θ n'est jamais parfaite (seulement approximative à ϵ près).
Et même si ϵ est infiniment petit, du moment qu'il est non nul, alors on ne peut savoir si θ est rationnel ou non et donc si la suite $({}^4x_n)$ sera périodique ou non !
C'est une expression du chaos mathématique.