

Devoir à la maison n°6

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.

Exercice - Théorème de Heine

On considère une fonction f continue sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Soit $\epsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe une jauge $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad \forall y \in [a, b], |x - y| \leq \delta(x) \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On note pour tout $x \in [a, b]$, $\delta(x) = \sup\{\delta \in]0, b - a[\mid \forall y \in [a, b], |y - x| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon\}$.

2. On note pour tout $[c, d] \subset [a, b]$, $\delta_{[c, d]} = \inf_{x \in [c, d]} \delta(x)$.
Montrer que pour tout $[c, d] \subset [a, b]$, $\delta_{[c, d]} > 0$.
3. On pose, pour tout $[c, d] \subset [a, b]$, $\mathcal{P}_{[c, d]} : \ll \delta_{[c, d]} > 0 \gg$.
Montrer : $\mathcal{P}_{[c, d]}$ et $\mathcal{P}_{[d, e]} \implies \mathcal{P}_{[c, e]}$
4. Montrer que l'hypothèse : $\delta_{[a, b]} = 0$ conduit à une absurdité.
5. Conclure quant au théorème de Heine.

Problème - Fonction à variation lente

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation lente si :

$$\forall c > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$$

1. (a) Montrer que la fonction $\ln$ est à variation lente.
(b) On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) \rightarrow \ell$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
Montrer que f est à variation lente.
(c) On suppose que $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. La fonction f est-elle toujours à variation lente ?
2. On fixe $a > 0$ et une fonction continue $h : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = a \exp \left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} du \right) \quad (*)$$

Montrer que $h(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$ pour tout $x \geq 2$.

3. (a) Donner une écriture de $\ln(x)$ sous la forme

$$\ln(x) = a \exp \left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} du \right), \quad \forall x \geq 2$$

avec $a > 0$ et $h : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $h(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

- (b) Pour quelle valeurs de $x < 2$ peut-on prolonger l'égalité de la question précédente ?
Justifier votre réponse.
4. On revient au cas d'une fonction f général de la forme $(*)$ donnée en question 2.
 - (a) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ fixé, il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \leq Cx^\epsilon$ pour tout $x \geq 2$.
On pourra fixer $M > 0$ tel que $|h(u)| \leq \epsilon$ pour tout $x \geq M$ et couper l'intégrale en deux.
 - (b) Montrer que pour tout $c > 0$, $\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} du \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$
 - (c) Montrer que f est à variation lente.