CPGE PC Le 08.10.16
2016-2017

Devoir Surveillé n°3

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé de deux exercices et d'un problème.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice 1 /6

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \Phi(x)e^{-2x} \qquad (E_\Phi)$$

1. Résoudre (H) l'équation différentielle homogène.
2. Résoudre (E_Φ), si $\Phi : x \mapsto x^2 - 2x + 1$.
3. On suppose ici que $\Phi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   (a) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
   On pose $z : x \mapsto y(x)e^{2x}$. Montrer que z est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Calculer z''
   (b) Trouver une expression de z.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_Φ).

Exercice 2 /7

On note $E = \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties **finies** de $\mathbb{N}$. On peut également écrire que c'est l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.

1. (a) On sait que la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur E. Donner la définition d'une relation d'ordre.
   (b) La relation d'ordre $\subset$ est-elle totale ? (On justifiera la réponse)
2. On note $A_1 = \{0; 4\}$, $A_2 = \{4; 5\}$, $A_3 = \{0; 2; 4\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\} = \big\{\{0, 4\}, \{4; 5\}; \{0, 2, 4\}\big\}$
   (a) Soit X un élément de E.
   Écrire, à l'aide de quantificateurs, la propriété : « X est un minorant de la partie $\mathcal{A}$ pour l'ordre $\subset$ », ainsi que sa négation.
   (b) Montrer que la partie $\mathcal{A}$ n'admet pas de plus petit élément.
   (c) Déterminer l'ensemble des minorants de la partie $\mathcal{A}$ dans E.
   (d) Démontrer que la partie $\mathcal{A}$ admet dans E, pour l'ordre $\subset$, une borne inférieure que l'on précisera.
   (e) Donner, sans démonstration, la borne supérieure de la partie $\mathcal{A}$ pour l'ordre $\subset$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, A_2 \dots A_n$ des parties finies de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, \dots A_n\}$, une partie finie non vide E.
   Démontrer que $\mathcal{A}$ possède une borne supérieure que l'on précisera.
   (b) Soit I un ensemble quelconque, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties finies de $\mathbb{N}$, et $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ une partie quelconque de E.
   Démontrer que la partie $\mathcal{A}$ possède une borne inférieure que l'on précisera.
   (c) Montrer qu'il existe au moins une partie E qui n'admet pas de borne supérieure dans E.

Problème

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire l'entier le plus grand, parmi les entiers plus petits que x.
Dans tout le problème, on considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} \end{array}$$

On note f_n, la n-ième itérée de f ($f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots f \circ f}_{n \text{ fois}}$) et pour $n = 0$, on pose $f_0 : x \mapsto x$.

A. Pour $x \in \mathbb{Q}$. Fraction continue limitée /6

Soit x un rationnel non entier. On suppose $x = \frac{p}{q}$, fraction irréductible avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $f(x)$ est représentable par une fraction de dénominateur strictement inférieur à q.
2. En déduire l'existence d'un entier n tel que $f_n(x)$ soit un entier. Que penser alors de $f_{n+1}(x)$?
3. Toujours avec cet entier n, montrer qu'on a alors :

$$x = y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{y_n}}}} \qquad (1)$$

   avec pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $y_k = \lfloor f_k(x) \rfloor$, un entier positif (sauf $y_0 \in \mathbb{Z}$).
4. Montrer qu'il n'existe qu'une seule suite finie d'entiers $(y_0, y_1, \ldots y_n)$ vérifiant (1) avec les conditions $y_k > 0$ pour $k > 0$.

Par la suite la fraction figurant au second membre de (1) sera notée $[y_0, y_1, \ldots y_n]$ et appelée *fraction continue*.

B. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Fraction continue illimitée /13

On désigne maintenant par x, un réel irrationnel. On forme la suite des nombres irrationnels $(x_n) = (f(x_n))$ définie par les relations de récurrence

$$x_0 = x \qquad x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}$$

Et on pose $y_n = \lfloor x_n \rfloor$.
On définit enfin, deux suites d'entiers $(P_n)_{n \geqslant -2}$ et $(Q_n)_{n \geqslant -2}$ par les relations de récurrence :

$$\begin{array}{llll} P_{-2} = 0 & P_{-1} = 1 & \forall\, n \in \mathbb{N}, & P_n = y_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_{-2} = 1 & Q_{-1} = 0 & \forall\, n \in \mathbb{N}, & Q_n = y_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{array}$$

1. Exprimer y_n en fonction de x_n et x_{n+1} (et sans la fonction partie entière).
2. Calculer P_0, P_1, Q_0 et Q_1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x = \frac{P_{n-1} x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} x_n + Q_{n-2}}$$

4. Soit ξ_n, le nombre rationnel représenté par la fraction continue $[y_0, y_1, \ldots y_n]$.
   Montrer que l'on a

$$\xi_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} y_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} y_n + Q_{n-2}}$$

5. Montrer que la suite (Q_n) est strictement croissante pour $n > 1$ et qu'elle tend vers $+\infty$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} = (-1)^n$.
6. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\xi_{2p} \leqslant \xi_{2p+2} < x < \xi_{2p+3} \leqslant \xi_{2p+1}$$

7. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leqslant \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$$

En déduire que la suite (ξ_n) converge vers x.

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x - \xi_{n+1}| \leqslant |x - \xi_n|$.
9. Pour $x = \pi$, on montre (avec une calculatrice) que $y_0 = 3$, $y_1 = 7$, $y_2 = 15$, $y_3 = 1 \ldots$.
Déterminer alors P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3.
En déduire une valeur approchée de π et préciser l'approximation obtenue.

C. Approximations d'irrationnels **/6**

On se replace dans les hypothèses de la partie B.
On considère $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et on lui associe les suites (x_n), puis (y_n), puis (P_n) et (Q_n) et enfin ξ_n.
Blabla Farey.

1. Montrer que pour tout fraction $\dfrac{p}{q}$ vérifiant $\left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leqslant \left| x - \dfrac{P_n}{Q_n} \right|$, on a $q \geqslant Q_n$
On pourra faire la disjonction de cas selon que $\frac{p}{q}$ se trouve entre x et ξ_n, ou non.

La fraction $\frac{P_n}{Q_n}$ est celle qui réalise la meilleure approximation de l'irrationnel x parmi les fractions de dénominateur inférieur ou égal à Q_n.

2. En déduire les deux propriétés suivantes :
   (a) Pour que le réel x soit irrationnel, il faut et il suffit qu'à chaque entier m, on puisse associer une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible avec $b > m$ vérifiant : $0 < \left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}$
   (b) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $0 < |px + q| < \epsilon$
3. *Euler montre en 1737 que le développement en fraction rationnel de e est*

$$e = [2, \overbrace{1, 2, 1}, \overbrace{1, 4, 1}, \cdots, \overbrace{1, 2k, 1}, \cdots]$$

En déduire que e est un nombre irrationnel.

D. Fractions continues périodiques **/10**

Dans cette partie, on considère d'abord une suite (y_n) d'entiers strictement positifs.

1. Soit (y_n), une suite d'entiers vérifiant $y_n > 0$ pour $n \geqslant 1$.
Montrer que la suite $\xi_n = [y_0, y_1, \ldots, y_n]$ converge vers un irrationnel x tel que,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad y_n = \lfloor f_n(x) \rfloor$$

Ce nombre sera dit représenté par la fractions continue illimité.
On admettra le théorème suivant sur les suites adjacentes extraites :
Si u_{2n} est croissante, (u_{2n+1}) est décroissante et que $\lim(u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$,
alors (u_n) est une suite croissante

2. Quel est le nombre réel α représenté par la fraction continue illimitée $[a, a, a \cdots, a, \cdots]$, où a désigne un entier supérieur ou égal à 1.
On commencera par montrer que α est la racine d'une équation du second degré.
3. Montrer plus généralement que les fractions continues périodiques représentent des racines irrationnelles d'équations du second degré à coefficients entiers.
Pour répondre à cette question, on pourra noter $[a_0, \ldots a_k, \overline{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{k+n}}]$, la fraction continue périodique de période $(a_k, a_{k+1}, \ldots a_{k+n}$ de longueur n et commençant à partir du rang k.
Autrement écrit :

$$[a_0, \ldots a_k, \overline{a_{k+1}, \ldots a_{k+n}}] = [a_0, \ldots a_k, a_{k+1}, \ldots a_{k+n}, a_k, a_{k+1}, \ldots a_{k+n}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{k+n}]$$

4. Joseph-Louis Lagrange énonce en 1770 :
Un irrationnel est quadratique si et seulement si son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.
Démontrer ce théorème (Question très difficile !).
5. En déduire que e n'est pas un nombre quadratique (racine d'aucun polynôme de degré 2 à coefficients entiers)