

Devoir à la maison n°10

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**.

Exercice

L'objet de cet exercice est de généraliser la notion d'inverse d'une application linéaire.

Soit E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Soit E' un supplémentaire dans E de $\text{Ker } u$ et F' un supplémentaire dans F de $\text{Im } u$.
 - (a) Prouver que l'application induite $\tilde{u} : E' \rightarrow \text{Im } u$, $x \mapsto u(x)$ est un isomorphisme.
 - (b) Soit $y \in F$. Prouver qu'il existe un couple unique $(x', y') \in E' \times F'$ tel que $y = u(x') + y'$. L'élément x' est alors noté $v(y)$.
 - (c) Prouver que l'on définit ainsi une application linéaire $v : F \rightarrow E$.
 - (d) Que dire de v lorsque u est un isomorphisme ?
2. On revient à $u \in \mathcal{L}(E, F)$ quelconque, et on considère l'application $v \in \mathcal{L}(F, E)$ définie à la question précédente.
 - (a) Déterminer le noyau et l'image de v .
 - (b) Prouver que $u \circ v \circ u = u$ et que $v \circ u \circ v = v$.

On dit que le morphisme v est un pseudo-inverse de u .

3. Réciproquement, soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.
 - (a) Prouver que $u \circ v$ et $v \circ u$ sont des projecteurs dont on précisera le noyau et l'image (en fonction de ceux de u et v).
 - (b) En déduire que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } v$ et $F = \text{Im } u \oplus \text{Ker } v$.
 - (c) On note $\bar{u} : \text{Im } v \rightarrow \text{Im } u$ et $\bar{v} : \text{Im } u \rightarrow \text{Im } v$ les applications induites par u et v . Montrer que $\bar{v}$ est l'isomorphisme réciproque de $\bar{u}$.

Problème

On pose $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1 \times 3}{2 \times 4}, \dots, a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on cherche à calculer Δ_n , le déterminant de la matrice

$$D_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \cdots & a_1 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

On pose $\Delta_0 = 1$.

A. Relation de récurrence

1. On fixe $n \geq 3$.
 - (a) Que peut-on dire du déterminant de la matrice extraite de la matrice D_n où l'on a effacé la dernière ligne et la première colonne ?
 - (b) Même question avec le déterminant de la matrice extraite de la matrice D_n où l'on a effacé la dernière ligne et la dernière colonne.
 - (c) Soit $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$. Dans quelle colonne de la matrice D_n a-t-on le coefficient a_k sur la dernière ligne ?
Vérifier que la matrice extraite de D_n après suppression de la ligne n et de la colonne contenant a_k est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$.
Expliciter les matrices A et C .

2. Montrer que pour tout $n \geq 3$, $\Delta_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k \Delta_{k-1}$.
3. Vérifier que la relation précédente est également vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

B. Détermination de Δ_n

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note E_k un ensemble à k éléments.

1. Énoncer le théorème de TAYLOR-YOUNG et vérifier que si f et g sont deux fonctions qui admettent un développement limité à l'ordre N en 0 de la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^N b_k x^k + o(x^N) \quad g(x) = \sum_{k=0}^N c_k x^k + o(x^N)$$

. Alors pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, le coefficient de x^n dans le $DL_N(fg)(0)$ est $\sum_{k=0}^n b_k c_{n-k}$.

On considère pour toute la suite : $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

2. Déterminer le plus grand intervalle I sur lequel f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ et justifier que f et g admettent un développement limité à tout ordre en 0.

On ne demande pas de la déterminer explicitement

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k! a_k}{(1+x)^{k+1/2}}$.
4. Simplifier $f(x)g(x)$ sur l'intervalle I et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k c_{n-k}$.
5. Montrer que pour tout entier n , $\Delta_n = c_n$.
6. Pour $x \in I$, déterminer $g'(x)$ et en déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $g^{(n)}(0)$ en fonction de g et d'un des termes de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
7. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{2n}$ et déterminer finalement une expression de Δ_n en fonction de n et de factorielles.