Devoir surveillé n°7
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrement) selon la qualité des copies.

Problème 1 - Formules d'inversion sur un treilli

A. Matrices triangulaires supérieures

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note

$$T_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall\ i \in \mathbb{N}_n, {}^i[M]_i = 1 \text{ et } \forall\ i > j, {}^i[M]_j = 0\}$$

1. Pour cette question, on fixe $n = 4$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Pour tout $i > j$, ${}^i[A]_j = 0$ et ${}^i[A]_i = 1$, donc /1

$$\boxed{A \in T_4(\mathbb{R})}$$

(b) A est triangulaire supérieure, avec des coefficients non nuls sur la diagonale donc A est inversible.
Puis si l'on fait à A les opérations élémentaires : pour tout $i \in \mathbb{N}_3$, la ligne $L_i \longrightarrow L_i - L_{i+1}$, alors on trouve I_4.
Donc A^{-1} s'obtient avec les mêmes opérations élémentaires à partir de l'identité. /1,5

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c) Plusieurs méthode (dont des récurrences), on peut par exemple considérer $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A = I_4 + A'$, ces matrices commutent et les calculs donnent :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (A')^k I_4^{n-k}$$

Or on a

$$(A')^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A')^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et } \forall\ k \geqslant 4,\ (A')^k = 0$$

Donc /2,5

$$\boxed{A^n = I_4 + nA' + \frac{n(n-1)}{2}(A')^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}(A')^3 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

/1

$$\boxed{\text{Pour } n = -1, \text{ on trouve } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}}$$

2. On suppose n quelconque, de nouveau.
Soit $A \in T_n(\mathbb{R})$. On note $A' = A - I_n$.

(a) On montre le résultat par récurrence, mais il faut être un peu plus exigeant sur l'hypothèse de récurrence.
Notons d'abord que $\forall\ i \geqslant j,\ {}^i[A']_j = 0$ (en faisant $i = j$ ou $i > j$).
Posons, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, Q_r : « $\forall\ i,j \in \mathbb{N}_n,\ i + r > j,\ {}^i[(A')^r]_j = 0$ ».
— Q_1 est vraie, d'après la remarque précédente.
— Soit $r \in \mathbb{N}^*$, supposons que Q_r est vraie.
Soient $i, j \in \mathbb{N}_n$ tels que $i + r + 1 > j$

$$ {}^i[(A')^{r+1}]_j = \sum_{k=1}^{n} {}^i[(A')^r]_k^k[A']_j = \sum_{k=1}^{j-1} \underbrace{{}^i[(A')^r]_k}_{=0 \text{ car } i+r>j-1\geqslant k} {}^k[A']_j + \sum_{k=j}^{n} {}^i[(A')^r]_k \underbrace{{}^k[A']_j}_{=0 \text{ car } k\geqslant j} = 0 $$

Donc Q_{r+1} est vraie.
Ainsi, $\forall\ r \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ i,j \in \mathbb{N}_n,\ i + r > j,\ {}^i[(A')^r]_j = 0$.
Donc en particulier pour $r = n$, comme $i + n > j$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, alors ${}^i[(A')^n]_j = 0$, *\/3,5*

$$\boxed{\text{Donc il existe } m \leqslant n \text{ (au pire } m = n) \text{ tel que } (A')^m = O}$$

(b) $A = I_n + A'$. Soit $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (A')^k$.

$$ \begin{aligned} A \times B &= (I_n + A') \times \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (A')^k \right) = \sum_{k=0}^{m-1} \left((-1)^k (A')^k + (-1)^k (A')^{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (A')^k - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} (A')^{k+1} = I_n + (-1)^m (A')^m = I_n \end{aligned} $$

car $(A')^m = 0$ L'inversibilité à droite suffit *\/1,5*

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (A')^k}$$

(c) $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe.
Toutes les matrices de $T_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, donc $T_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.
— $I_n \in T_n(\mathbb{R})$, donc $T_n(\mathbb{R})$ est non vide.
— D'après la question précédente, compte-tenu de la forme de A', alors si $A \in T_n(\mathbb{R})$,
$A^{-1} = I_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k (A')^k$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.
Donc $A^{-1} \in T_n(\mathbb{R})$.
— Soient $A, B \in T_n(\mathbb{R})$,

$$ \forall\ i \in \mathbb{N}_n, \quad {}^i[AB]_i = \sum_{k=0}^{n} {}^i[A]_k^k[B]_i = \sum_{k=0}^{i-1} \underbrace{{}^i[A]_k}_{=0,\ k<i} {}^k[B]_i + {}^i[A]_i^i[B]_i + \sum_{k=i+1}^{n} {}^i[A]_k \underbrace{{}^k[B]_i}_{=0,\ i<k} = 0+1+0 = 1 $$

$$ \forall\ i > j \in \mathbb{N}_n, \quad {}^i[AB]_j = \sum_{k=0}^{n} {}^i[A]_k^k[B]_j = \sum_{k=0}^{i-1} \underbrace{{}^i[A]_k}_{=0,\ k<i} {}^k[B]_j + \sum_{k=i}^{n} {}^i[A]_k \underbrace{{}^k[B]_j}_{=0,\ j<i\leqslant k} = 0+1+0 = 1 $$

Donc $A \times B \in T_n(\mathbb{R})$ *\/2*

$$\boxed{(T_n(\mathbb{R}), \times) \text{ est un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{R})}.$$

B. Modélisation de treillis et inversion de Rota

1. Calculs simples.
La chaîne x_i, x_j est unique chaine de longueur 1 qui lie x_i à x_j.
Par antisymétrie, il n'y a aucune chaîne de longueur $p > 1$ qui lie x_i à x_i. *\/1*

$$\boxed{c_1(x_i, x_j) = 1 \text{ si } x_i \prec x_j \text{ et } c_p(x_i, x_i) = 0 \text{ pour } p > 0.}$$

2. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $x_i, x_j \in L$.
   - Si on n'a pas $x_i \preceq x_j$, alors $c_{p+1}(x_i, x_j) = 0$
     et il n'existe pas de x_k tel que $x_i \preceq x_k \prec x_j$, sinon par transitivité $x_i \preceq x_j$.
     Donc $\displaystyle\sum_{x \preceq z \prec y} c_p(x, z) = 0$.
   - Supposons que $x_i \preceq x_j$.

   On note $C_k(a, b)$, l'ensemble des chaines de longueur k qui lie a à b. Soit

   $$\Phi : \bigcup_{x_k \ | \ x_i \preceq x_k \prec x_j} C_p(x_i, x_k) \to C_{p+1}(x_i, x_j), (x_i = y_0, \dots y_p = x_k) \mapsto (x_i = y_0, \dots y_p = x_k, y_{p+1} = x_j)$$

   Φ est bijective :
   — surjective, car toute chaine de longueur $p+1$ à une sous-chaine de longueur p qui commence par x_i.
   — injective, deux chaines de longueurs p distinctes ont nécessairement des images distinctes.

   Donc, comme la réunion des ensembles $C_p(x_i, x_k)$ est disjointe
   (une chaîne ne se termine pas à la fois par x_k et $x_{k'}$) :

   $$\text{Card}[C_{p+1}(x_i, x_j)] = \text{Card}[\bigcup_{x_k \ | \ x_i \preceq x_k \prec x_j} C_p(x_i, x_k)] = \sum_{x_k \ | \ x_i \preceq x_k \prec x_j} \text{Card}[C_p(x_i, x_k)]$$

   /3

   $$\boxed{c_{p+1}(x_i, x_j) = \sum_{x_i \preceq x_k \prec x_j} c_p(x_i, x_j)}$$

3. Etude de A.
   (a) Par contraposée,

   $$i > j \Longrightarrow \text{NON}(x_i \preceq x_j) \Longrightarrow c_1(x_i, x_j) = 0 \Longrightarrow^i [A]_j = 0 \Longrightarrow^i [I_n + A]_j = 0$$

   Et par ailleurs, on a vu que pour $i \in \mathbb{N}_n$, pour $p \geqslant 1$, $c_p(x_i, x_i) = 0 = c_1(x_i, x_i) =^i [A]_i$.
   Donc ${}^i[I_n + A]_i = 1$. */1*

   $$\boxed{\text{Donc } I_n + A \in T_n(\mathbb{R}).}$$

   (b) Montrons par récurrence sur p : P_p : « $\forall\ (i, j) \in \mathbb{N}_n \qquad {}^i[A^p]_j = c_p(x_i, x_j)$ »
   — Par convention (raisonnée donc), on a bien $A^0 = I_n = (c_0(x_i, x_j))_{i,j \in \mathbb{N}_n}$.
   Donc P_0 est vraie.
   — P_1 est également vraie (ce n'est pas nécessaire ici pour la démonstration).
   — Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que P_p est vraie. Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$

   $$\begin{aligned} {}^i[A^{p+1}]_j &=^i [A^p \times A]_j = \sum_{k=1}^{n} {}^i[A^p]_k^k[A]_j = \sum_{k=1}^{n} c_p(x_i, x_k) c_1(x_k, x_j) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_n \ | \ x_k \prec x_j} c_p(x_i, x_k) \times 1 = \sum_{k \in \mathbb{N}_n \ | \ x_i \preceq x_k \prec x_j} c_p(x_i, x_k) \\ &= c_{p+1}(x_i, x_j) \end{aligned}$$

   où on a "sorti" de la somme les termes x_k pour lesquels on n'a pas $x_k \preceq x_j$, puis ceux pour lesquels on n'a pas $x_i \preceq x_k$ (dans ce cas $c_p(x_i, x_k) = 0$, nécessairement).
   Donc P_{p+1} est vraie. */3*

   $$\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, \forall\ (i, j) \in \mathbb{N}_n \qquad {}^i[A^p]_j = c_p(x_i, x_j).}$$

4. Fonction de Möbius On note pour tout $(x, y) \in L^2$

   $$\mu(x, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{p \geqslant 0} (-1)^p c_p(x, y) & \text{si } x \preceq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, (le calcul reste vrai même quand on n'a pas $x_i \preceq x_j$).

   $${}^i[M]_j = \mu(x_i, x_j) = \sum_{p \geqslant 0} (-1)^p c_p(x_i, x_j) = \sum_{p \geqslant 0} (-1)^p \, {}^i[A^p]_j =^i \left[\sum_{p \geqslant 0} (-1)^p A^p \right]_j$$

   /1,5

   $$\boxed{M = \sum_{p \geqslant 0} (-1)^p A^p}$$

(b) D'après la partie précédente, on a l'égalité : $M = (I_n + A)^{-1}$.
Soit les matrices colonnes F et G telles que $[G]_j = g(x_j)$ et $[F]_j = f(x_j)$.
Comme $c_1(x_i, x_j) = \mathbf{1}_{x_i \prec x_j}$ (fonctions caractéristiques) et $c_0(x_i, x_j) = \mathbf{1}_{x_i = x_j}$:

$$\begin{aligned}
\forall\ j \in \mathbb{N}_n,\ \sum_{x_i \preceq x_j} f(x_i) &= \sum_{x_i \prec x_j} f(x_i) + \sum_{x_i = x_j} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{x_i \prec x_j} f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{x_i \prec x_j} f(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_0(x_i, x_j) f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} c_1(x_i, x_j) f(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [F]_i^i [I_n]_j + \sum_{i=1}^{n} [F]_i^i [A]_j = [F(I_n + A)]_j
\end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned}
\forall\ j \in \mathbb{N}_n,\ \sum_{x_i \preceq x_j} \mu_L(x_i, x_j) g(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_L(x_i, x_j) g(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [G]_i^i [M]_j = [GM]_j
\end{aligned}$$

Et donc a la suite d'équivalences (formule d'inversion de Rota) : */2,5*

$$\boxed{\begin{gathered}
\forall\ j \in \mathbb{N}_n,\ g(x_j) = \sum_{x_i \preceq x_j} f(x_i) \Longleftrightarrow G = F(I_n + A) \\
\Longleftrightarrow F = G(I_n + A)^{-1} = GM \Longleftrightarrow \forall\ j \in \mathbb{N}_n,\ f(x_j) = \sum_{x_i \preceq x_j} \mu(x_i, x_j) g(x_i)
\end{gathered}}$$

C. Application aux treillis de divisibilité

Dans cette partie, on applique les résultats trouvés dans la partie précédente.
On considère $L = \mathbb{N}_n$ (avec n grand!) et la relation d'ordre de divisibilié : $i \preceq j$ ssi $i|j$. Comme précédemment, on associe à ce treillis, la matrice $A = ({}^i[c_1(i,j)]_j)_{i,j \in \mathbb{N}_n}$

1. Description pour $n = 9$.

(a) Comme 1 divise tous les entiers de 1 à 5, on a pour $j \neq 1$: ${}^1[A]_j = 1$.
De même pour les lignes suivantes, cela donne : */1*

$$\boxed{I_n + A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}}$$

On voit apparaître les multiples de chaque entier i.

(b) On sait que $M = (I_n + A)^{-1}$.
On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes (la matrice $I_n + A$ est déjà échelonnée) :

$$\begin{array}{lcl}
L_1 & \leftarrow & L_1 - L_2 - L_3 + L_6 - L_5 - L_7 - L_9 \\
L_2 & \leftarrow & L_2 - L_4 - L_6 \\
L_3 & \leftarrow & L_3 - L_6 - L_9 \\
L_4 & \leftarrow & L_4 - L_8
\end{array}$$

/2

$$\boxed{M = \begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}}$$

2. Retour au cas général. Expression de μ.
On note $M=(I_n+A)^{-1}$ et $\mu(i,j)={}^i[M]_j=\sum_{p\geqslant 0}(-1)^p c_p(i,j)$.

(a) Pour tout $i,j\in\mathbb{N}_n$,

$$\delta_{i,j}={}^i[I_n]_j={}^i[M(I_n+A)]_j=\sum_{k=0}^{n}{}^i[M]_k^k[I_n+A]_j=\sum_{k=0}^{n}\mu(i,k)\mathbf{1}_{k|j}=\sum_{k|j}\mu(i,k)$$

/2

$$\boxed{\sum_{d|j}\mu(i,d)=\delta_{i,j}}$$

(b) Si i ne divise pas j, il n'y a aucun chaîne de i à j, donc pour tout p, $c_p(i,j)=0$.
Et par ailleurs, comme $M\in T_n(\mathbb{R})$, ${}^i[M]_i=1$. /1

$$\boxed{\text{Ainsi } i \text{ ne divise pas } j,\ \mu(i,j)=0, \text{ alors que pour tout } i,\ \mu(i,i)=1.}$$

(c) Commençons par le cas où pour tout i, $\alpha_i=1$.
Posons, pour tout $r\in\mathbb{N}^*$,

P_r : « $\forall\ p_1,\dots p_r$ r nombres premiers distincts et tout $i\in\mathbb{N}$, $\mu(i,iP)=(-1)^r$ où $P=\prod_{h=1}^{r}p_h$ »

— On note $j=ip_1$,

$$0=\delta_{i,j}=\sum_{d|j=ip_1}\mu(i,d)=\mu(i,i)+\mu(i,j)+\sum_{d|j\text{ et }d\neq|i}\underbrace{\mu(i,d)}_{=0}=1+\mu(i,j)$$

Donc nécessairement, $\mu(i,j)=\mu(i,ip_1)=-1$. Ainsi P_1 est vraie.

— Soit $r\in\mathbb{N}_n$ et supposons que pour tout $h\in\mathbb{N}_r$, P_r est vraie. On note $j=ip_1p_2\cdots p_rp_{r+1}$,

$$0=\delta_{i,j}=\sum_{d|j}\mu(i,d)=\mu(i,j)+\sum_{d\text{ tq }i|d,d|y,d\neq y}\mu(i,d)$$

Or l'ensemble $\{d \text{ tq } i|d, d|j \text{ et } d\neq j\}=\{i\times\prod_{j\in J}p_j, J\subset\mathbb{N}_{r+1}\text{ et }J\neq\mathbb{N}_{r+1}\}$.
On regroupe l'ensemble des ces nombres $d=i\prod_{j\in J}p_j$, en fonction du cardinal de J :

$$\begin{aligned}-\mu(i,j)&=\sum_{d\text{ tq }i|d,d|y,d\neq y}\mu(i,d)=\sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{J\subset\mathbb{N}_{r+1}\ |\ \mathrm{Card}J=k}\mu(i,i\prod_{j\in J}p_j\right)\\&=\sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{J\subset\mathbb{N}_{r+1}\ |\ \mathrm{Card}J=k}(-1)^{\mathrm{Card}J}\right)=\sum_{k=0}^{r}\left((-1)^k\sum_{J\subset\mathbb{N}_{r+1}\ |\ \mathrm{Card}J=k}1\right)\\&=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r+1}{k}=(-1+1)^{r+1}-(-1)^{r+1}\end{aligned}$$

Donc $\mu(i,j)=(-1)^{r+1}$ et donc P_{r+1} est vraie.

En revanche, si un facteur premier est multiple (cas $\alpha_i>1$),
Dans le même esprit, supposons dans un premier temps que $j=ip_1^2p_2\cdots p_rp_{r+1}$ et notons $j'=ip_1p_2\cdots p_rp_{r+1}$,

$$0=\sum_{d|j}\mu(i,d)=\underbrace{\sum_{d|j'}\mu(i,d)}_{=\delta_{i,j'}=0}+\sum_{d|j,p_1^2|d}\mu(i,d)=\sum_{d'|j}\mu(i,p_1^2d')$$

$$\mu(i,j)=-\sum_{d'|j,d'\neq j}\mu(i,p_1^2d')=0$$

par récurrence si le résultat est vraie pour d' composé d'au plus r facteurs premiers...
Finalement : /4

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{si } j=i\times(p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}),\text{ avec } p_1\dots p_k,\ k \text{ nombres premiers distincts , on a :}\\ \mu(i,j)=\left\{\begin{array}{cl}(-1)^k & \text{si }\forall\ i\in\mathbb{N}_k,\ \alpha_i=1\\ 0 & \text{si }\exists\ i\in\mathbb{N}_k,\ |\ \alpha_i\neq 1\end{array}\right.\end{array}}$$

Remarques !

On peut aussi montrer à l'aide de la relation 2.(a) que μ est multiplicative :

$$\forall\ a,b,c,d \text{ tels que } a|b, c|d \text{ et } \frac{b}{a} \wedge \frac{d}{c} = 1, \qquad \mu(a,b)\mu(c,d) = \mu(ac,bd)$$

Mais on serait moins dans l'esprit du programme du DS.

Remarques !

On peut aussi voir que si $j = i \times p_1 p_2 \cdots p_r$,
alors pour tout p, une chaine de longueur s est de la forme $(i, iP_1, iP1P_2, \dots, iP_1P_2\cdots P_s = j)$ où dans chaque P_i (pour i de 1 à s) se trouve les nombres premiers p_j (pour j de 1 à r).
On peut donc associer pour chaque chaîne de longueur s, une application de $\mathbb{N}_r$ dans $\mathbb{N}_s$.
Mais on a la seule contrainte supplémentaire : chaque $P_i \neq 1$, donc cette application doit être surjective.
On applique le résultat du DM9 :

$$c_s(i,j) = (-1)^r \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} k^r$$

On calcule alors

$$\mu(i,j) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s c_s(i,j) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s (-1)^r \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} k^r = \sum_{0 \leqslant k \leqslant s \leqslant r} (-1)^{k+s+r} \binom{s}{k} k^r$$

Mais je n'ai pas réussi à achever ce calcul. . .

3. Application à l'indicatrice d'Euler.
On applique la formule de Rota. Ici $g(x_j) = j$ et $f(x_i) = \varphi(i)$:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d,n) d = \sum_{d|n} d\mu(1, \frac{n}{d})$$

En effet, $\mu(a,b) = \mu(1, \frac{b}{a})$:
tout chaîne de a à b passant par ar, avec $ar|b$ est associé bijectivement
à tout chaîne de 1 à $\frac{b}{a}$ passant par r avec $r|\frac{b}{a}$.
Puis, en faisant le changement de variable $h = \frac{n}{d}$ /2

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = n \sum_{h|n} \frac{\mu(1,h)}{h}}$$

Problème 2 - Théorème du minimax

A. Etude des ensembles données

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $e_k^T x =^k [x]$.
Donc si $x \in \Delta$, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$: $^k[x] \geqslant 0$. Autrement écrit : $0 \leqslant x$
Par ailleurs, $e^T x = \sum_{i=1}^{n} {}^i[x] = 1$, donc $^k[x] = 1 - \sum_{i \neq k} {}^k[x] \leqslant 1$, car $^i[x] \geqslant 0$. /1

$$\boxed{\text{Donc si } x \in \Delta, \text{ alors } 0 \leqslant x \leqslant e.}$$

2. $0 \notin \Delta$, donc /1,5

$$\boxed{\Delta \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$$

On ne se laissera pas influencer par la forme de la question. . . .

3. $e_i^T \times A$ est la i^{e}ligne de A, puis $B \times e_j$ est la j^{e}colonne de B. /1

$$\boxed{\text{Donc } e_i^T \times A \times e_j =^i [A]_j = \text{Coeff}_{i,j}(A)}$$

4. Soit $i_0 \in \mathbb{N}_n$.

Pour tout $j_0 \in \mathbb{N}_n$,

$$\min_{j \in \mathbb{N}_n} e_{i_0}^T \times A \times e_j = \min_{j \in \mathbb{N}_n} {}^{i_0}[A]_j \leqslant {}^{i_0}[A]_{j_0} = e_{i_0}^T \times A \times e_{j_0}$$

Puis, on prend comme majorant, la maximum en i, à droite :

$$\forall\ j_0 \in \mathbb{N}_n : \qquad \forall\ i_0 \in \mathbb{N}_n, \quad \min_{j \in \mathbb{N}_n} e_{i_0}^T \times A \times e_j \leqslant e_{i_0}^T \times A \times e_{j_0} \leqslant \max_{i \in \mathbb{N}_n} e_i^T \times A \times e_{j_0}$$

On prend alors le maximum à gauche en i : puisqu'on a un majorant constant (en i) :

$$\forall\ j_0 \in \mathbb{N}_n : \qquad \max_{i \in \mathbb{N}_n} \min_{j \in \mathbb{N}_n} e_i^T \times A \times e_j \leqslant \max_{i \in \mathbb{N}_n} e_i^T \times A \times e_{j_0}$$

Enfin, on a un minorant à gauche en j, on peut donc prendre le minimum à droite (en j) /2,5

$$\boxed{\max_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\min_{j \in \mathbb{N}_n} e_i^T \times A \times e_j \right) \leqslant \min_{j \in \mathbb{N}_n} \left(\max_{i \in \mathbb{N}_n} e_i^T \times A \times e_j \right)}$$

B. Etude de deux matrices particulières

On considère $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note, pour l'étude de la matrice S, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Etude des puissances de S

(a) Le calcul donne $J^3 = I_3$. On a donc un polynôme annulateur de J : $P_J = X^3 - 1$.
Il est bien unitaire. Si il existait un autre polynôme P de degré plus petit qui annule J, on peut supposer $P = a + bX + cX^2$,
Alors $aI_3 + bJ + cJ^2 = 0$.
Or il suffit d'écrire la relation matricielle, on constate que (I_3, J, J^2) est une famille libre.
Donc un tel polynôme P n'existe pas. /2

$$\boxed{\text{le polynôme, unitaire, de degré minimal qui annule } J \text{ est } P_J = X^3 - 1.}$$

(b) On a alors $S = J - J^2$ (simple calcul). Et donc, comme J et J^2 commutent :

$$S^3 = (J - J^2)^3 = J^3 - 3J^4 + 3J^5 - J^6 = I_3 - 3J + 3J^2 - I_3 = -3(J - J^2) = -3S$$

/1

$$\boxed{S = J - J^2 \qquad S^3 = -3S}$$

(c) Si S était inversible, on aurait :

$$S^2 = S^{-1} \times S^3 = -3S^{-1}S = -3I_3$$

Ceci est faux, donc /1

$$\boxed{\text{La matrice } S \text{ n'est pas inversible.}}$$

(d) Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad \mathsf{P}_k$: « $S^{2k+1} = (-3)^k S$ et $S^{2k+2} = (-3)^k S^2$ ».
— Pour $k = 0$, on a $S^{2k+1} = S^1 = S = (-3)^0 S$ et $S^{2k+2} = S^2 = (-3)^0 S^2$.
Donc P_0 est vraie.
— Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que P_k est vraie.

$$S^{2(k+1)+1} = S^{2k+3} = S^3 S^{2k} = -3SS^{2k} = (-3)S^{2k+1} = (-3)\underbrace{(-3)^k S}_{\mathsf{P}_k} = (-3)^{k+1} S$$

$$S^{2(k+1)+2} = S^{2k+4} = S^3 S^{2k+1} = -3SS^{2k+1} = (-3)S^{2k+2} = (-3)\underbrace{(-3)^k S^2}_{\mathsf{P}_k} = (-3)^{k+1} S^2$$

Donc P_{k+1} est vraie. /2

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ S^{2k+1} = (-3)^k S \text{ et } S^{2k+2} = (-3)^k S^2.}$$

2. maximin(S). On fixe $n=3$. On considère $x \in \Delta$ fixé pour les questions (a) à (d).

   On peut supposer que $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

   (a) Comme $x \in \Delta$, on sait que $x_1, x_2, x_3 \in [0,1]$.
   Donc $x_i - x_j \leqslant 1 - 0 = 1$ et $x_i - x_j \geqslant 0 - 1 = -1$ *(/0,5)*

   $$\boxed{\text{pour tout } i, j \in \mathbb{N}_3,\ x_i - x_j \in [-1, 1]}.$$

   (b) Le calcul est simple : *(/0,5)*

   $$\boxed{(x_3 - x_2) + (x_1 - x_3) + (x_2 - x_1) = 0.}$$

   (c) On trouve, sans difficulté *(/1)*

   $$\boxed{x^T S y = \sum_{i,j}^{i} [S]_j x_i y_j = x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2}$$

   (d) On réorganise :
   $$x^T S y = y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)$$
   Notons $m = \min(x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1)$.
   On a alors $x_3 - x_2 \geqslant m$, $x_1 - x_3 \geqslant m$ et $x_2 - x_1 \geqslant m$.
   Donc, comme chaque $y_i \geqslant 0$
   $$y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1) \geqslant y_1 m + y_2 m + y_3 m = (y_1 + y_2 + y_3) = m = m$$
   car $y \in \Delta$.
   Donc $\inf_{y \in \Delta} x^T \times S \times y \geqslant m$.
   Et par ailleurs,
   - si $m = x_3 - x_2$, alors en prenant $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Delta$, on trouve $x^T \times S \times y = x_3 - x_2 = m$.
   - si $m = x_1 x_3$, alors en prenant $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Delta$, on trouve $x^T \times S \times y = x_1 - x_3 = m$.
   - si $m = x_2 - x_1$, alors en prenant $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Delta$, on trouve $x^T \times S \times y = x_2 - x_1 = m$.

   Donc nécessairement $\inf_{y \in \Delta} x^T \times S \times y \leqslant m$ *(/2,5)*

   $$\boxed{\inf_{y \in \Delta} x^T \times S \times y = \min(x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1)}$$

   (e) On relâche le caractère fixé de x. On note toujours $m(x) = \min(x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1)$.
   On a $0 = (x_3 - x_2) + (x_1 - x_3) + (x_2 - x_1) \geqslant 3m(x)$, donc nécessairement $m(x) \leqslant 0$.
   Donc pour tout $x \in \Delta$, $m(x) \leqslant 0$, donc $\sup_{x \in \Delta} m(x) \leqslant 0$.
   Par ailleurs, avec $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$, on a $x \in \Delta$ et $m(x) = 0$.
   Donc $\sup_{x \in \Delta} m(x) \geqslant 0$. *(/2,5)*

   $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi maximin}(S) := \sup_{x \in \Delta} m(x) = 0 \text{ et} \\ \text{maximin}(S) \text{ est atteinte par le calcul } x^T \times S \times y \text{ avec } x = \frac{1}{3}e. \text{ (indépendamment de } y\text{)}\end{array}}$$

   (f) On s'intéresse maintenant, **de manière duale** à minimax(S).
   On fixe $y \in \Delta$. On note $M(y) = \max(y_2 - y_3, y_3 - y_1, y_1 - y_2)$.
   Alors, pour tout $x \in \Delta$, en réorganisant et par positivité des x_i :
   $$x^T S y = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \leqslant x_1 M(y) + x_2 M(y) + x_3 M(y) = M(y)$$
   Puis en prenant $x_i = 1$ si $M(y) = y_{i+1[3]} - y_{i+2[3]}$, on trouve $x^T S y = M(y)$.
   Ainsi, nécessairement $\sup_{x \in \Delta} x^T S y \geqslant M(y)$.
   Finalement $\sup_{x \in \Delta} x^T S y = M(y)$.
   Ensuite, comme $3M(y) \geqslant (y_2 - y_3) + (y_3 - y_1) + (y_1 - y_2) = 0$, nécessairement $M(y) \geqslant 0$.
   Donc $\inf_{y \in \Delta} M(y) \geqslant 0$.
   Mais comme, pour $y = \frac{1}{3}e$, on trouve $M(y) = 0$, on a donc également : $\inf_{y \in \Delta} M(y) \leqslant 0$. *(/4)*

   $$\boxed{\text{Bilan : minimax}(S) = \inf_{y \in \Delta} \left(\sup_{x \in \Delta} x^T S y\right) = \inf_{y \in \Delta} M(y) = 0 = \text{maximin}(S).}$$

3. maximin(T). On considère maintenant $n = 4$

(a) Soit $x \in \Delta$, fixé. Il s'agit du même raisonnement que précédemment :

$$\forall\ y \in \Delta, \qquad x^T \times T \times y = y_1(-x_2+x_3+x_4)+y_2(x_1-x_3-x_4)+y_3(-x_1+x_2+x_4)+y_4(-x_1+x_2-x_3)$$

Puis en notant $m(x) = \min(-x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 - x_4, -x_1 + x_2 + x_4, -x_1 + x_2 + x_3)$, on a par positivité de chaque y_i :

$$\forall\ y \in \Delta, \qquad x^T \times T \times y \geqslant y_1 m(x)+y_2 m(x)+y_3 m(x)+y_4 m(x) = (\underbrace{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}_{=1 \quad y\in\Delta})m(x) = m(x)$$

Ce minorant étant atteint en $y = e_1$ (resp. $y = e_2$, $y = e_3$ ou $y = e_4$) si $m(x) = -x_2+x_3+x_4$ (resp. $m(x) = x_1 - x_3 - x_4$, $m(x) = -x_1 + x_2 + x_4$ ou $m(x) = -x_1 + x_2 - x_3$).
On trouve donc

$$\inf_{y\in\Delta} x^T \times T \times y = \min(-x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 - x_4, -x_1 + x_2 + x_4, -x_1 + x_2 - x_3)$$

Puis, comme $x \in \Delta$: $x_4 \geqslant 0 \geqslant -x_3$, et en additionnant $-x_1 + x_2$:

$$-x_1 + x_2 - x_3 \leqslant -x_1 + x_2 + x_4$$

Donc $\min(-x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 - x_4, -x_1 + x_2 + x_4, -x_1 + x_2 - x_3) = \min(-x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 - x_4, -x_1 + x_2 - x_3)$ /3

$$\boxed{\inf_{y\in\Delta} x^T \times T \times y = \min(-x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 - x_4, -x_1 + x_2 - x_3)}$$

(b) Puis en additionnant :

$$3m(x) \leqslant (-x_2 + x_3 + x_4) + (x_1 - x_3 - x_4) + (-x_1 + x_2 - x_3) = -x_3 \leqslant 0$$

On a donc, en passant à la borne supérieure : $\sup_{x\in\Delta}(m(x)) \leqslant 0$.
Et par ailleurs, avec $x = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_4) + 0e_3$, on a :
— $x \in \Delta$
— et $m(x) = \min(-\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - 0 - \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 0 = \min(0, 0, 0, \frac{1}{3}) = 0$
Ainsi,$\sup_{x\in\Delta}(m(x)) \geqslant 0$
Par double inégalité : /2

$$\boxed{\text{maximin}(T) = \sup_{x\in\Delta}(m(x)) = 0 = x_0^T \times T \times y, \qquad \forall\ y \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ et } x_0 = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_4)}$$

Remarques !
On démontre là encore que

$$\text{minimax}(T) = \inf_{y\in\Delta}(M(y)) = 0 = x^T \times T \times y_0, \qquad \forall\ x \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ et } y_0 = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_4)$$

$$\text{minimax}(T) = \text{maximin}(T)$$

Il y a un certain équilibre dans ces matrices. On interprétera ces résultats à la fin de la partie suivante.

C. Théorème de Van Neumann

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall\ i, j \in \mathbb{N}_n$, ${}^i[I]_j = 1$.

1. Toutes les colonnes de I sont identiques et non nulles (égales à e) ,
donc Im $(I) = \text{vect}(e)$ et /1

$$\boxed{\text{rang } (A) = 1}$$

Par ailleurs, $I = e \times e^T$, donc $x^T \times I \times y = x^T(ee^T)y = (x^Te)(e^Ty) = 1 \times 1 = 1$ /1

$$\boxed{x^Tey = 1}$$

2. On note $A' = A + \Big(1 - \min_{i,j\in\mathbb{N}_n}({}^i[A]_j)\Big)I$.
Pour tout $k,\ell \in \mathbb{N}_n$,

$$^k[A']_\ell = ^k[A]_\ell + \Big(1 - \min_{i,j\in\mathbb{N}_n}({}^i[A]_j)\Big) = 1 + ({}^k[A]_\ell - \min_{i,j\in\mathbb{N}_n}({}^i[A]_j)) \geqslant 1$$

/1

$$\boxed{\text{Donc pour tout } k,\ell \in \mathbb{N}_n,\ {}^k[A']_\ell > 0.}$$

3. Soit $y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   (a) La matrice $A'y$ est une matrice colonne.
   Elle possède donc un nombre fini de coefficient. Il existe donc $i_0 \in \mathbb{N}_n$ (*non nécessairement unique*) tel que
   $$^{i_0}[A'y] = \max_{i\in\mathbb{N}_n}({}^i[A'y])$$
   Pour tout $x \in \Delta$, comme tous les termes sont positifs :
   $$x^T A'y = \sum_{i=1}^n x_i \times ^i[A'y] \leqslant \sum_{i=1}^n x_i \times ^{i_0}[A'y] = ^{i_0}[A'y]\sum_{i=1}^n x_i = ^{i_0}[A'y] = \max_{i\in\mathbb{N}_n}({}^i[A'y])$$
   Donc $\sup_{x\in\Delta} x^T A'y \leqslant \max_{i\in\mathbb{N}_n}({}^i[A'y])$.
   Et par ailleurs, en prenant $x = e_{i_0} \in \Delta$, on trouve
   $$e_{i_0}^T A'y = ^{i_0}[A'y] = \max_{i\in\mathbb{N}_n}({}^i[A'y])$$
   Donc *| /2,5*
   $$\boxed{\sup_{x\in\Delta} x^T A'y = \max_{i\in\mathbb{N}_n}({}^i[A'y])}$$
   (b) Et donc, on a les équivalences, (pour tout $M \in \mathbb{R}$) :
   $$\begin{aligned}\sup_{x\in\Delta} x^T A'y \leqslant M &\iff \max_{i\in\mathbb{N}_n}({}^i[A'y]) \leqslant M\\ &\iff \forall\, i \in \mathbb{N}_n, {}^i[A'y] \leqslant M\\ &\iff A'y \leqslant Me\end{aligned}$$
   /1,5
   $$\boxed{\forall\, M \in \mathbb{R},\quad \sup_{x\in\Delta} x^T A'y \leqslant M \iff A'y \leqslant Me}$$

4. On rappelle que $\text{minimax}(A') = \inf_{y\in\Delta}\big(\sup_{x\in\Delta} x^T A'y\big)$.
   (a) Donc, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$\begin{aligned}\text{minimax}(A') \leqslant t &\iff \inf_{y\in\Delta}\big(\sup_{x\in\Delta} x^T A'y\big) \leqslant t\\ &\iff \forall\, \epsilon > 0, \exists\, y \in \Delta \text{ tel que } \sup_{x\in\Delta} x^T A'y \leqslant t - \epsilon\end{aligned}$$
   Mais comme $y \in \Delta \iff 0 \leqslant y$ et $y^T e = e^T y = 1$, on a l'équivalence (en appliquant une réponse précédente :
   $$\text{minimax}(A') \leqslant t \iff \forall\, \epsilon > 0, \exists\, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } y \geqslant 0, y^T e = 1 \text{ et } A'y \leqslant (t-\epsilon)e$$
   Puis en faisant tendre ϵ vers 0 , par uniformité : */2*
   $$\boxed{\text{minimax}(A') \leqslant t \iff \exists\, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } y \geqslant 0, y^T e = 1 \text{ et } A'y \leqslant te}$$
   (b) En divisant par $t > 0$.
   et en considérant $y' = \frac{1}{t}y$:
   $$\text{minimax}(A') \leqslant t \iff \exists\, y' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } y' \geqslant 0, (y')^T e = \frac{1}{t} \text{ et } A'y' \leqslant e$$
   On remarque que, de par l'existence de y', on peut affirmer :
   $$\text{minimax}(A') \leqslant t \Longrightarrow \sup_{y\geqslant 0, A'y\leqslant e} y^T e \geqslant \frac{1}{t} \Longrightarrow \max_{y\geqslant 0, A'y\leqslant e} y^T e \geqslant \frac{1}{t}$$
   d'après le résultat admis de l'énoncé.
   Réciproquement, si $\max_{y\geqslant 0, A'y\leqslant e} y^T e \geqslant \frac{1}{t}$,
   Alors, il existe $y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que : $y \geqslant 0$, $A'y \leqslant e$ et $y^T e \geqslant \frac{1}{t}$.
   En prenant $y' = \frac{1}{y^T e}y$, alors :

- $y' \geqslant 0$.
- $(y')^T \times e = \frac{1}{y^T e} y^T e = 1$.
- $A'y' = \frac{1}{y^T e} A'y \leqslant \dfrac{1}{\frac{1}{t}} e = te$.

Donc d'après la question précédente : $\text{minimax}(A') \leqslant t$ /3

$$\boxed{\text{minimax}(A') \leqslant t \Longleftrightarrow \frac{1}{t} \leqslant \sup_{y \geqslant 0, A'y \leqslant e} (e^T y)}$$

Remarques !

C'est encore le théorème de Weistrass (où une extension, plutôt) qui permet d'affirmer que :

$$\sup_{y \geqslant 0, A'y \leqslant e} (e^T y) = \max_{y \geqslant 0, A'y \leqslant e} (e^T y)$$

En effet dans ce cas, on a :
- *La variable d'optimisation qui est y (extension à n dimension du x classique)*
- *La fonction continue qui est $y \mapsto e^T y$*
- *Le segment qui est le compact (ici en dimension finie, c'est un ensemble fermé (inégalité large) et bornée) : $\{y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid y \geqslant 0$ et $A'y \leqslant e\}$*

Dans ce cas la fonction est bornée et atteint ses bornes.
Ces résultats sont au programme de seconde année de CPGE.

(c) On a donc pour tout $t > 0$:

$$\frac{1}{\text{minimax}(A')} \geqslant \frac{1}{t} \Longleftrightarrow \frac{1}{t} \leqslant \max_{y \geqslant 0, A'y \leqslant e} (e^T y)$$

/1

$$\boxed{\frac{1}{\text{minimax}(A')} = \sup_{y \geqslant 0, A'y \leqslant e} (e^T y) = \max_{y \geqslant 0, A'y \leqslant e} (e^T y)}$$

5. La stratégie est équivalente, nous passons rapidement (pour $t > 0$) :

$$\begin{aligned} \text{maximin}(A') \geqslant t \quad & \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \exists\, x \in \Delta \text{ tel que } \inf_{y \in \Delta} x^T A' y \geqslant t - \epsilon \\ & \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \exists\, x \geqslant 0, e^T x = 1 \text{ tel que } x^T A \geqslant (t - \epsilon) e^T \end{aligned}$$

car on a également :

$$\forall\, M \in \mathbb{R}, \qquad \inf_{y \in \Delta} x^T A' y \geqslant M \Longleftrightarrow \forall\, j \in \mathbb{N}_n, [x^T A]_j \geqslant M \Longleftrightarrow (x')^T A' \geqslant M e^T$$

Et en continuant la comparaison :

$$\begin{aligned} \text{maximin}(A') \geqslant t \quad & \Longleftrightarrow \exists\, x' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } x' \geqslant 0, (x')^T e = \tfrac{1}{t} \text{ et } ((x')^T A')^T = (A')^T x \geqslant e \\ & \Longleftrightarrow \min_{x \geqslant 0, (A')^T x \leqslant e}((x')^T) = \inf_{x \geqslant 0, (A')^T x \leqslant e}((x')^T) \leqslant \frac{1}{t} \end{aligned}$$

Ainsi /4

$$\boxed{\frac{1}{\text{maximin}(A')} = \min_{x \geqslant 0, (A')^T x \geqslant e} (e^T x)}$$

6. Il s'agit de fusionner la réponses à la question précédente et $\text{minimax}(A') = \text{maximin}(A')$ Puis pour tout $x, y \in \Delta$, (en notant $\alpha = 1 - \min({}^i[A]_j)$) :

$$x^T (A') y = x^T (A + \alpha I) y = x^T A y + \alpha x^T I y = x^T A y + 1$$

. Ainsi

$$\text{minimax}(A) = \text{minimax}(A') - 1 = \text{maximin}(A') - 1 = \text{maximin}(A)$$

/2

$$\boxed{\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \text{minimax}(A) = \text{maximin}(A) \qquad\qquad \text{théorème de Van Neumann(1928)}}$$

Remarques !

***Question bonus :** Que pensez-vous de l'introduction du puits dans le jeu du chi-fu-mi (pierre/feuille/ciseau) ?*

En suivant la modélisation de la théorie des jeux, les matrices S et T sont les matrices de gain aux jeu du chi-fu-mi Ciseau/Feuille/Pierre et Ciseaux/Feuille/Pierre/Puits.
En effet, si le joueur 1 joue e_i et le joueur 2 joue e_j, alors le joueur 1 gagne exactement la valeur de ${}^i[S]_j = e_i^T \times S \times e_j$ (resp. ${}^i[T]_j = e_i^T \times T \times e_j$ pour le second jeu).
Comme il s'agit d'un jeu à somme nulle, le joueur 2 gagne exactement l'opposé de ce que gagne le joueur 1. Les matrices S et T résument donc parfaitement la règle du jeu.
La matrice T, comme elle est écrite attache nécessairement à :
- *$i = 1$: les ciseaux*

- $i = 2$: *la feuille*
- $i = 3$: *la pierre*
- $i = 1$: *le puits*

Pour S c'est quelconque : permutation paire de (ciseaux, feuille, pierre).
Quelle est alors la meilleure stratégie pour le joueur 1 ?
Il s'agit de maximiser son gain en jouant x, sachant que l'adversaire à chercher à maximiser le sien, donc à minimiser la valeur en jouant y.
A priori, les joueurs jouent des stratégies pures : e_1, e_2, ou e_3 (voire e_4, dans le cas de T). Mais il est préférable de penser qu'une bonne stratégie est plutôt une stratégie mixte, qui se s'appuie sur une stratégie probabiliste $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, avec la condition $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, i.e. $x_i = \mathbf{P}(S = e_i)$.
L'usage de la probabilité s'explique en particulier par la répétition (pseudo)-infine du jeu.
Finalement, ce qu'on a démontré :

- *Dans le Chi-fu-mi classique, la meilleure stratégie (la même pour les deux joueurs) est de jouer en suivant une probabilité uniforme $p = \frac{1}{3}$ chacun : Pierre/Ciseau/Feuille.*
- *Dans le Chi-fu-mi avec le puits, la meilleure stratégie (la même pour les deux joueurs) est de jouer en suivant une probabilité uniforme $p = \frac{1}{3}$ chacun : Puis/Ciseau/Feuille et jamais la pierre.*

La suite des explications : cet après-midi au CSK (suivez Callixte)